

# PURISTETTUJEN RAKENTEIDEN TARKASTELU STANDARDISSA SFS-EN 1992-1-1 (kohta 5.8)

## 1 KÄSITTEET

### 1.1 Pilarin tehollisen pituuden määrittely (kohta 5.8.3.2)

Tehollisella pituudella  $\ell_0$  tarkoitetaan pilarin tuentatavasta, liittyvien rakenteiden jäykkyyksistä ja pilarin omasta taivutusjäykkyydestä johdettua pituutta, jota käytetään pilarin stabiiliustarkasteluissa. Tämä pituus voidaan useimmiten ajatella lähes samaksi kuin pilarin nurjahduspituus. Pilarin tehollinen pituus on verrannollinen pilarin jännemittaan  $\ell$ , joka on pilarin tukipisteiden välinen pituus tai mastopilarissa pituus pilarin päästä tukipisteeseen. Nurjahduspituus liittyy kimmoteorian mukaisiin tarkasteluihin eikä sitä ole määritelty plastisuusteorian mukaisissa tarkasteluissa, mutta tehollisesta pituudesta  $\ell_0$  johdettua hoikkuutta käytetään murtorajatila-tarkasteluissa määriteltäessä toisen asteen vaikutuksien suuruutta pilarin mitoitusmomentissa, kun käytetään nimellisjäykkyyteen perustuvaa menetelmää. Tässä menetelmässä esiintyy kriittinen kuorma  $N_B$ , joka määritellään lausekkeena:

$$N_B = \frac{\pi^2 (EI)}{\ell_0^2}$$

Kriittisen kuorman arvioimista tarkastellaan yksityiskohtaisemmin liitteessä 1.

### 1.2 Geometriset epätarkkuudet (kohta 5.2)

Epätarkkuuksia ovat vinous (*poikkeama pystysuorasta*) ja kaarevuus (*suoruuden puute*). Niistä aiheutuu kuorman epäkeskisyys ideaalirakenteeseen verrattuna. Epätarkkuudet otetaan pääsäännön mukaan huomioon murtorajatilatarkasteluissa, mutta ei käyttörajatilatarkasteluissa. Murtorajatilassa epätarkkuudet sisällytetään tavanomaisiin ja onnettomuuskuormitusyhdistelmiin.

#### 1.2.1 Epätarkkuuden käsittely (kohta 5.2)

Epätarkkuutta voidaan tarkastella vinoutena  $\theta_i$ :  $\theta_i = \theta_0 \alpha_h \alpha_m$

- $\theta_0$  on perusarvo = 1/200
- $\alpha_h$  on korkeuden tai pituuden  $l$  vaikutuskerroin:  $\alpha_h = \frac{2}{\sqrt{l}}$ ;  $\frac{2}{3} \leq \alpha_h \leq 1$
- $\alpha_m$  on rakenneosien määrän (=  $m$  kappaletta samassa kerroksessa olevia pystyrakenteita) vaikutuskerroin:  $\alpha_m = \sqrt{0,5 \left(1 + \frac{1}{m}\right)}$
- Erillispilareita käsiteltäessä  $l$  = pilarin todellinen pituus ja  $m = 1$
- Jäykistysvaikutusta käsiteltäessä  $l$  = rakennuksen korkeus ja  $m$  = kerroksessa olevien jäykistysvaikutusta antavien osien lukumäärä

*Epätarkkuus erillispilareissa* = (a) kuorman epäkeskisyys  $e_i$  tai (b) poikittainen korvausvoima  $H_i$ , joka tuottaa saman momentin kuin epäkeskisyys  $e_i$

- $e_i = \theta_i \frac{\ell_0}{2}$ ;  $\ell_0$  = pilarin tehollinen pituus (ks. myös liite 1).
- Seinissä ja jäykistettyjen kehien pilareissa voidaan käyttää aina  $e_i = \ell_0/400$ .
- Vaakasuora korvausvoima sivusiirtyvissä pilareissa:  $H_i = \theta_i N_{Ed}$ .
- Jäykistettyjen kehien pilareissa:  $H_i = 2\theta_i N_{Ed}$ .
- Korvausvoiman  $H_i$  avulla voidaan laskea pilariin sen vinoudesta aiheutuva taivutusmomentti.

### 1.3 Jäykistetyt ja jäykistämättömät kehärakenteet - määritelmät

Kehärakenteet jaetaan jäykistettyihin (*braced*) ja jäykistämättömiin (*non-braced*) seuraavan määritelmän mukaan:

- Kehärakennetta pidetään jäykistettynä, jos sen vaakasuora stabiilius on järjestetty suunnitteleamalla kehään sellaisia jäykistysrakenteita, jotka kykenevät ottamaan vastaan kaikki vaakakuormien vaikutukset. Tällaisen ehdon katsotaan toteutuvan, kun jäykistysrakenteet ovat tarpeeksi symmetrisesti rakennuksen alalla sijaitsevia ja voidaan osoittaa, että lineaarisesti tarkasteltuna jäykistysrakenteet voivat siirtää perustuksen tasolla leikkausvoiman, joka on vähintään 90 % koko rakennukseen kohdistuvien vaakavoimien summasta. *Lisäksi jäykistysrakenteiden tulee säilyä halkeilemattomina käyttörajatilassa vaakakuormien ja niitä vastaavien pystykuormien vaikuttaessa.*
- Muut kehärakenteet ovat jäykistämättömiä.
- Sivusiirtymätön (*non-sway*) ja jäykistetty (*braced*) kehä eivät ole synonyymejä, eli jäykistetty kehäkin voi olla sivusiirtävä. Ns. mastojäykistetty kehä on sivusiirtävä, vaikka mastojen jäykkyyden tulee olla riittävä hallitsemaan vaakakuormista ja epätarkkuuksista aiheutuvia momenteja ja mastot voivat siirtää tarvittavat kuormat perustuksille.
- Mastojäykistetyssä rakennusrungossa jokainen kehän pilari, joka kytketään toisiin pilareihin niin, että pilareiden voidaan katsoa siirtävän vaakavoimia toisiaan vastaavan siirtymän ansiosta, osallistuu kehän jäykistykseen ja se tulee mitoittaa tämän huomioon ottaen.

### 1.4 Erillispilarit

Erillispilarit ovat joko yksittäisiä pilarielementtejä tai jonkin kehärakenteen osia, joita voidaan mitoituksessa käsitellä erillisinä ja muusta rakenteesta irrotettuna kokonaisuutena. Erillispilarin poikkileikkaus sen päiden välillä tai peräkkäisten tukipisteiden välillä on tavallisesti vakio. Kehän lineaarisen voimasuurelaskennan jälkeen useimpia pilareita voidaan käsitellä erillispilareina.

### 1.4.1 Erillispilareiden hoikkuus ja tehollinen pituus (kohta 5.8.3.2)

Hoikkuusparametrinä  $\lambda$  käytetään suhdetta

$$\lambda = \ell_0 / i; \quad i = \sqrt{I_c / A_c}$$

missä

$\ell_0$  on pilarin tehollinen pituus,

$i$  on halkeilemattoman betonipoikkileikkauksen  $A_c$  jäyhyyssäde,

$I_c$  on halkeilemattoman betonipoikkileikkauksen jäyhyysmomentti.

Suorakaidepoikkileikkauksessa  $i = \frac{h}{\sqrt{12}}$ .

Eri tavoin tuettujen pilareiden teholliset pituudet esitetään seuraavassa taulukossa 1 Eurokoodin 2 mukaisina.

**Taulukko 1:** Tavallisimpiin tuentatapoihin liittyvät teholliset pituudet

SFS-EN 1992-1-1 kuvan 5.7 mukaiset nurjahduspituudet						
$\ell_0 = l$	$\ell_0 = 2l$	$\ell_0 = 0,7l$	$\ell_0 = 0,5l$	$\ell_0 = l$	$0,5l < \ell_0 < l$	$\ell_0 > 2l$
Huomautus: Nämä arvot ovat hieman pienempiä Betoninormien arvoihin verrattuna						

**Huomautus:** jos oikeanpuoleisessa mastopilarin tapauksessa kiinnitys pilarin juuressa ei ole täysin jäykkä (eli kiertymä  $\theta > 0$ ), tehollinen pituus on verrannollinen kiertymän  $\theta$  suuruuteen ja  $\ell_0$  on selvästi suurempi kuin  $2l$ .

### 1.4.2 Geometrisen epälineaarisuuden tarkastelu (kohta 5.8.3.1)

Geometrinen epälineaarisuus lisää mitoitusvoimasuureita lineaarisen tarkasteluun verrattuna ja periaatesäännön mukaan se tulee ottaa huomioon, kun se vaikuttaa merkittävästi voimasuureisiin.

Sitä ei tarvitse ottaa huomioon, jos pilarin hoikkuus  $\lambda \leq \lambda_{lim.EC2}$ :

$$\lambda_{lim.EC2} = \frac{20A \times B \times C}{\sqrt{N_{Ed} / A_c f_{cd}}}$$

missä

$$A = \frac{1}{1 + 0,2\varphi_{ef}} \text{ tai } 0,7, \text{ jos } \varphi_{ef} \text{ ei ole tunnettu (} A = 0,7 \text{ vastaa arvoa } \varphi_{ef} = 2),$$

$$B = \sqrt{1 + 2\omega} \text{ tai } 1,1, \text{ jos } \omega \text{ ei ole tunnettu; } \omega = \frac{A_s f_{sd}}{A_c f_{cd}} \text{ (} B = 1,1 \text{ vastaa raudoitussuhdetta } \omega = 0,1)$$

$$C = 1,7 - \frac{M_{01}}{M_{02}} \text{ tai } 0,7, \text{ jos momenttisuhde } M_{01}/M_{02} \text{ ei ole tunnettu. (} C = 0,7 \text{ vastaa vakiomomenttia koko pilarin pituudella, eli } M_{01}/M_{02} = 1)$$

$M_{01}$  ja  $M_{02}$  ovat lineaarisen tarkastelun mukaiset momentit pilarin päissä ja  $\left| \frac{M_{01}}{M_{02}} \right| \leq 1$ .

Hoikkuusraja on käytännössä pilarin mitoituskuorman funktio. Jos  $A = 0,7$ ,  $B = 1,1$  ja  $C = 0,7$ ,  $\lambda_{lim,EC2} = 25$ , kun  $N_{Ed} = 0,66A_c f_{cd}$ . Tämä vastaa Betoninormeissa olevaa vakiorajaa,  $\lambda_{lim,BN} = 25$ , mutta kyseistä mitoituskuormaa vastaavaa kestävyyttä ei kaikissa pilareissa voida saavuttaa. Eurokoodin hoikkuusraja, joka on normaalivoiman  $N_{Ed}$  funktio, voi poiketa Betoninormien vakioksi oletetusta rajasta huomattavasti. Mastopilareissa voidaan asettaa  $N_{Ed}/A_c f_{cd} = 0,35$  ellei suhteen suuruudesta ole tarkempaa tietoa.

### 1.4.3 Pilareiden teholliset pituudet (kohta 5.8.3.2(3))

(a) Jäykistetyin kehän pilareissa  $\ell_0 = 0,5\ell \sqrt{\left(1 + \frac{k_1}{0,45 + k_1}\right) \left(1 + \frac{k_2}{0,45 + k_2}\right)}$

(b) Jäykistämättömän kehän pilareissa (esimerkiksi mastopilarit)

$$\ell_0 = \ell \times \max \left\{ \sqrt{1 + 10 \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}}; \left(1 + \frac{k_1}{1 + k_1}\right) \left(1 + \frac{k_2}{1 + k_2}\right) \right\}$$

missä

$k_1$  ja  $k_2$  ovat pilarin päiden suhteelliset joustoluvut,  $k_i = \frac{\theta_i (EI)}{M_i \ell}$

$\theta_i$  on pilarin pään  $i$  kiertymä momentista  $M_i$ ,

$(EI)$  on pilarin taivutusjäykkyys,

$\ell$  on vapaa kerroskorkeus.

Kun pilari on jatkuva kahden kerroksen välisessä liittymässä, käytetään jatkuvan pään joustolukua  $k$  laskettaessa jäykkyystermin  $(EI)/\ell$  paikalla liittymän ylä- ja alapuolisen pilarin jäykkyystermin summaa  $[(EI/\ell)_a + (EI/\ell)_b]$ , missä indeksit  $a$  ja  $b$  tarkoittavat liittymän eri puolilla olevia osia (ks. seuraavan sivun esimerkki).

Jos kriittinen kuorma  $N_B$  lasketaan esimerkiksi numeerisella menetelmällä, tehollinen pituus on yleismääritelmän mukaan

$$\ell_0 = \pi \sqrt{\frac{(EI)}{N_B}}$$

$(EI)$  on tässä tapauksessa vertailujäykkyys, kun on määritelty, että  $N_B = \frac{\pi^2(EI)}{\ell_0^2}$ .

Kaikissa tarkasteluissa  $\ell_0$  on silloin jäykkyyttä  $(EI)$  vastaava pituus.

### Joustolukujen $k$ suuruudet (kohta 5.8.3.2(3))

Täysin kiertymättömän pään joustoluku on  $k$ :n määrittelyn perusteella 0, koska kiertymä  $\theta$  on nolla. Käytännössä ei täysin kiertymättömiä sauvan päitä esiinny ja  $k_i$ :n suositeltavana minimiarvona tulee käyttää 0,1.

Tämän perusteella tehollinen pituus 'lähes jäykästi' molemmista päistään kiinnitetystä jäykistetyin kehän pilarissa on  $\ell_0 = 0,5\ell \left(1 + \frac{0,1}{0,55}\right) = 0,59\ell \approx 0,6\ell$ .

Vastaavasti jäykistämättömässä (= sivusiirtyvässä) 'lähes jäykästi' molemmista päistään kiinnitetystä kehän pilarissa tehollinen pituus on

$$\ell_0 = \ell \times \max \left\{ \sqrt{1,5}; \left(1 + \frac{0,1}{1,1}\right)^2 \right\} = 1,22\ell.$$

Mastopilarin teholliseksi pituudeksi saadaan  $\ell_0 = 2\ell$ , jos  $k_1 = 0$  ja  $k_2 = \infty$ . Se on silloin sama kuin maston teoreettinen nurjahduspituus. Jos  $k_1 > 0$ , kasvaa tehollinen pituus vielä, kuten esimerkki 1 jäljempänä osoittaa. Betoninormeissa käytetään tällaisessa tapauksessa  $\ell_0 = 2,2\ell$ . Jos  $k_1 = 0,1$  (suositeltava minimiarvo) ja  $k_2 = \infty$ , SFS-EN 1992-1-1 mukainen tehollinen pituus on  $\ell_0 = 2,18$ , joka on käytännössä sama kuin Betoninormien mukainen pituus.

Huomautus: Joustoa esiintyy myös mastopilarin kiinnittyessä perustukseen. Perustuksen aiheuttaman jouston suuruus riippuu perustuksen detaljeista.

### Pilarianturan muodonmuutoksista aiheutuva jousto

Pilarianturan muodonmuutoksista aiheutuvan joustoluvun suuruusluokkaa voidaan arvioida lausekkeella:

$$k = \frac{3H^2}{16} \left( \frac{N_{Ed}}{M_{Ed}} + \frac{3}{H} \right) \frac{(EI)}{E_{cd} B h_f^3 \ell}$$

missä  $N_{Ed}$  ja  $M_{Ed}$  ovat normaalivoima ja momentti pilarin ja anturan liittymässä ja

$H$  on anturan sivumitta taivutussuunnassa,

$B$  on anturan leveys,

$h_f$  on anturan tehollinen korkeus,

$\ell$  on pilarin systeemipituus

$E_{cd}$  on anturabetonin tehollinen kimmokerroin, useimmiten riittävällä tarkkuudella voidaan käyttää  $E_{cd} = 15000$  MPa,  
 $(EI)$  on pilarin nimellinen taivutusjäykkyys.

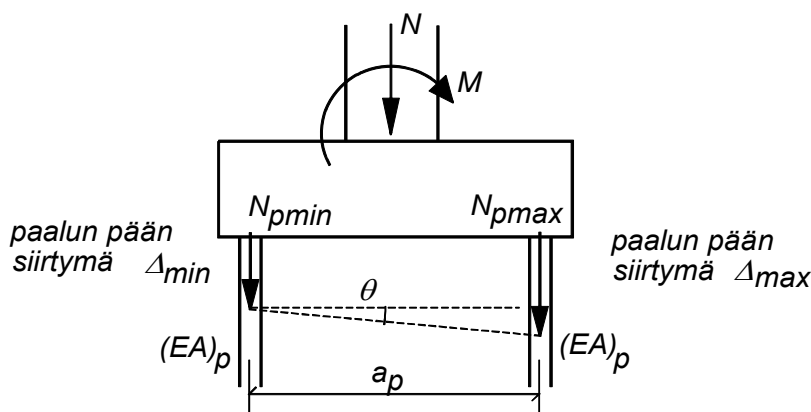
Oletetaan, että  $B = 1,5$  m ja  $H = 2$  m,  $h_f = 0,5$  m sekä  $(EI) = 40$  MNm<sup>2</sup> ja  $\ell = 3$  m. Oletetaan lisäksi, että  $M_{Ed}/N_{Ed} \leq h/2$ , kun  $h =$  pilarin sivumitta taivutustasossa  $= 0,58$  m. Joustoluvun suuruusluokka on silloin  $k \leq 0,016$ .

Tämä on paljon pienempi kuin suositeltava minimiarvo  $k_{min} = 0,1$ , jonka voidaan katsoa sisältävän myös perusmaan ja perustamismenetelmän aiheuttaman jouston. Paaluperustuksen aiheuttama jousto otetaan huomioon erikseen.

### Paaluperustuksen vaikutus pilarianturan joustolukuun

Paaluperustuksen jousto riippuu paalujen ominaisuuksista, mutta voidaan esittää yksinkertaistettuna paalun tehollisen pituuden  $L_{p,ef}$  avulla. Määritellään, että paalun tehollinen pituus  $L_{p,ef}$  on paalun pään siirtymän laskemiseksi tarvittava pituus, kun oletetaan, että pituudella  $L_{p,ef}$  vaikuttaa paaluvoiman  $N_p$  aiheuttama vakio puristuma  $\varepsilon_p = N_p/(EA)_p$ , eli paalun pään siirtymä voimasta  $N_p$  on  $\Delta = L_{p,ef}\varepsilon_p$ .

Jos anturaan pilarilta siirtyvät voimasuureet  $N$  ja  $M$  aiheuttavat paaluvoimat  $N_{pmin}$  ja  $N_{pmax}$ , paaluille tukeutuvan anturan kiertymä  $\theta$  arvioidaan anturan vastakkaisilla reunoilla olevien paaluryhmien aksiaalijäykkyyksien  $(EA)_p$  perusteella.



Anturan geometria ja ominaisuudet:

$(EA)_p$  = paaluryhmän aksiaalijäykkyys

$a_p$  = paaluryhmien keskiöväli

$$N_{pmin} = N_{pn} - N_{pm}$$

$$N_{pmax} = N_{pn} + N_{pm}$$

$$N_{pm} = M/a_p$$

□ Paalun kokoonpuristuva pituus =  $L_{p,ef}$  (riippuu paalun tyypistä ja perustusolosuhteista)

□ Kiertymä  $\theta = \frac{\Delta_{max} - \Delta_{min}}{a_p} = L_{p,ef} (\varepsilon_{p,max} - \varepsilon_{p,min}) = \frac{L_{p,ef}}{a_p (EA)_p} (N_{pmax} - N_{pmin})$

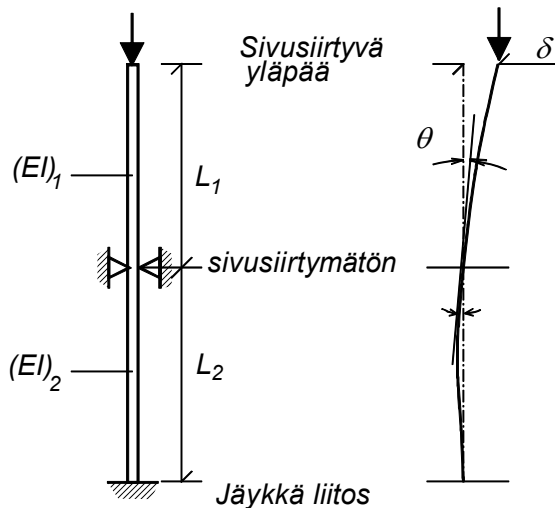
□ Paaluvoimien erotus riippuu vain momentista M:

□  $N_{pmax} - N_{pmin} = 2N_{pm} = 2 \frac{M}{a_p}$ , eli  $\theta = \frac{2L_{p,ef}}{(EA)_p a_p^2} M$

$$\square \text{ Joustoluku } k = \frac{2L_{p.ef} (EI)}{a_p^2 (EA)_p \ell}$$

Tässä tapauksessa joustoluku  $k$  voi olla selvästi suurempi kuin suositeltava minimiarvo  $0,1$ .

### **Esimerkki 1: Tehollisen pituuden laskeminen**



Pilarin ylempi kerros 1 on sivusiirtyvä, mutta alempi kerros 2 sivusiirtymätön ja pilarin kiinnitys perustukseen oletetaan jäykäksi. Arvioidaan ylemmän kerroksen pilarin tehollinen pituus  $\ell_{01}$ .

Alemman kerroksen tuottama jousto aiheuttaa sen, että  $\theta > 0$  ja  $\delta$  on suurempi kuin jäykästi alapäästään jäykästi kiinnitetystä mastossa.

Kiertymän  $\theta$  suuruus voidaan arvioida taivutusjäykkyyden  $(EI)_2$  ja pituuden  $L_2$  avulla:

- $\square$  Kiertymä arvioidaan Mohrin taipuma-analogian avulla. Kun pilarin 2 alapäässä on jäykkä kiinnitys:  $\theta = 0,25 \frac{ML_2}{(EI)_2}$ ,  $M$  = pilarin 2 yläpäässä vaikuttava momentti (= mastona toimivan pilarin 1 alapään momentti)

- $\square$  Pilarin 1 alapään joustoluku on  $k_1 \leq \frac{\theta}{M} \left[ \frac{(EI)_1}{L_1} + \frac{(EI)_2}{L_2} \right]$  (SFS-EN 1992-1-1/5.8.3.2(4)), eli  $k_1 = 0,25 \left( \frac{L_2 (EI)_1}{L_1 (EI)_2} + 1 \right)$ . Jos  $L_1 \approx L_2$ ,  $k_1 = 0,25 \left( \frac{(EI)_1}{(EI)_2} + 1 \right)$  ja kun  $(EI)_1 < (EI)_2$ ,  $k_1 < 0,5$ . Jos  $L_1 \neq L_2$ , mutta  $(EI)_1 = (EI)_2$ ,  $k_1 = 0,25 \left( 1 + \frac{L_2}{L_1} \right)$ , eli  $k_1 < 0,5$ , jos  $L_2 < L_1$ .

- $\square$  Pilarin 1 yläpään joustoluku  $k_2 = \infty$  (koska pilarin yläpää on nivelenä toimiva) ja kun  $k_1$  on enintään  $0,5$ , ylemmän kerroksen tehollinen pituus  $\ell_{01}$  on enintään  $\ell_{01} \leq L_1 \times \max \left\{ \sqrt{1+10k_1}; 1 + \frac{k_1}{k_1+1} \right\}$  eli  $\ell_{01} \leq L_1 \times \max \left\{ \sqrt{6}; 1 + \frac{0,5}{1,5} \right\} = 2,5L_1$ .

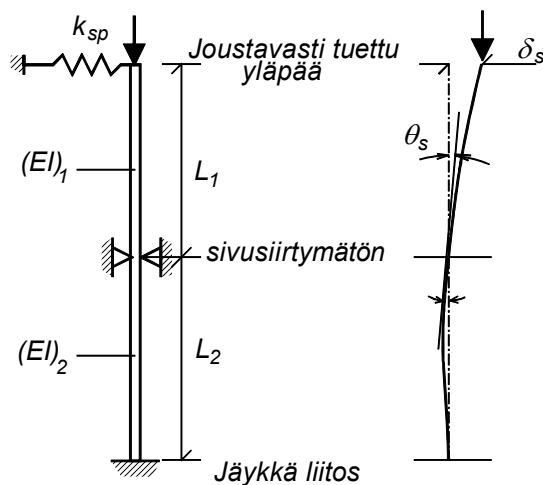
- $\square$  Yleensä  $(EI)_1$  on selvästi pienempi kuin  $(EI)_2$  senkin vuoksi, että ylempi pilari halkeilee taipuman ansiosta, mutta alempi kerros on halkeilematon suuremman normaalivoiman vuoksi, eli  $\ell_0 = 2,5L_1$  voidaan pitää useimmiten tehollisen pituuden yläraja-arviona. Eri ohjeissa on yleensä tätä pienempiä

tehoillispituuksia, esim. BS 8110 mukaan jäykistämättömiä elementtipilareita käsiteltäessä  $\ell_0 = 2,3L_1$  (vastaa joustolukua  $k_1 = 0,43$ ).

- Kun poikkileikkaussuureet ja pituudet poikkeavat toisistaan huomattavasti,  $k_1 = 0,25 \left( \frac{L_2 (EI)_1}{L_1 (EI)_2} + 1 \right)$  ja  $\ell_{01} \leq L_1 \times \max \left\{ \sqrt{1+10k_1}; 1 + \frac{k_1}{k_1+1} \right\}$ .

### Esimerkki 2: Tehollisen pituuden laskeminen

Esimerkin 1 mukainen pilari kuuluu usean samanlaisen pilarin ryhmään, jossa pilarit pienentävät toistensa sivusiirtävyyttä = pilarin yläpää on joustavasti kiinnitetty siirtymää vastaan ( $k_{sp}$  = toisten pilareiden jäykistysvaikutuksen jousivakio, kun pilarit on kytketty toisiinsa).



Toisiinsa kytkettyjen toisten pilareiden vaikutus pienentää kiertymän  $\theta$  arvoon  $\theta_s$ , joka voidaan arvioida lausekkeena:

$$\theta_s = \frac{k_{sp}}{\sum_j k_{sp,j}} \frac{HL_1L_2}{4(EI)_2},$$

missä  $k_{sp}$  on tarkasteltavan pilarin yläpään jousivakio, jonka suuruus voidaan arvioida asettamalla pilarin yläpäähän vaakasuora ykkösvoima  $H = 1$  laskemalla tämän voiman tuottama taipuma  $\delta_H$ :  $k_{sp} = H/\delta_H$ .

Sen perusteella saadaan jousivakioksi  $k_{sp} = \frac{(EI)_1(EI)_2}{\frac{L_1^3(EI)_2}{3} + \frac{L_1^2L_2(EI)_1}{4}}$  ja  $k_{sp,j}$  ovat

kunkin ryhmään kuuluvan pilarin vastaavat arvot,  $j = 1 \dots n_p$ . Jos kaikki pilarit ovat pituudeltaan ja jäykkyysominaisuuksiltaan samankaltaisia,  $\sum_j k_{sp,j} = n_p k_{sp}$  ja

joustoluku  $k_1$  on:

$$k_1 = \frac{1}{4n_p} \left( \frac{L_2 (EI)_1}{L_1 (EI)_2} + 1 \right) \geq 0,1$$

Jos  $n_p = 2$  ja  $L_1 = L_2$  sekä  $(EI)_1 = (EI)_2$ ,  $k_1 = 1/4 = 0,25$  ja pilarin tehollinen pituus  $\ell_{01}$  pienenee edelliseen esimerkkiin verrattuna huomattavasti:

$$\ell_{01} = L_1 \times \max \left\{ \sqrt{1+10k_1}; 1 + \frac{k_1}{k_1+1} \right\} \leq L_1 \times \max \left\{ \sqrt{3,5}; 1 + \frac{0,25}{1,25} \right\} = 1,87L_1$$

**Huomautus 1:** Jos alemman kerroksen alapään kiinnitys ei ole jäykkä, se lisää joustoa jonkin verran.



Huomautus 2: Jäykkyudet ja pituudet vaikuttavat asiaan tapauskohtaisesti ja  $l_{01}$  vaihtelee sen mukaisesti (ts. yllä olevaa tulosta ei voi pitää vakiosääntönä, vaan se osoittaa vain suuruusluokkaa).

## 2 SFS-EN 1992-1-1 SISÄLTÄMÄT PILARIN MITOITUSMENETELMÄT

SFS-EN 1992-1-1 sisältää kolme eri tapaa tai menetelmää pilarin mitoittamiseksi:

- Yleinen menetelmä - kohta 5.8.6
- Nimellisjäykkyyteen perustuva menetelmä - kohta 5.8.7
- Nimelliskaarevuuteen tai nimelliskäyritykseen perustuva menetelmä - kohta 5.8.8

### 2.1 Yleinen menetelmä – SFS-EN 1992-1-1 kohta 5.8.6

Menetelmässä käytetään epälineaarista analyysiä, jonka avulla otetaan huomioon toisen asteen vaikutukset:

- Pilarin taipumasta aiheutuvat lisämomentit ovat verrannollisia pilarin normaalivoiman suuruuteen = toisen asteen vaikutukset lisäävät taivutusmomentteja ja pilari mitoitetään ottaen huomioon normaalivoiman  $N_{Ed}$  lisäksi taivutusmomentit, joihin sisältyvät toisen asteen vaikutukset.
- Epälineaarisia vaikutuksia laskettaessa käytetään taivutusjäykkyyden arvona nimellistä jäykkyyttä, jossa otetaan huomioon halkeilun, materiaalien epälineaarisuuden ja virumisen vaikutukset rakenteen kokonaistoimintaan.
- Betonin ja terästen jännitys-muodonmuutoskäyrinä käytetään kokonais-tarkasteluun soveltuvia ominaisuuksia luvun 3 mukaisesti, betonin ominaisuudet ovat kohdan 3.1.5 mukaiset. Jännitysfunktiossa (lauseke (3.14)) sijoitetaan kimmokertoimen  $E_{cm}$  paikalle  $E_{cd} = E_{cm}/\gamma_{cE}$  ja  $k$ -arvo lasketaan sijoittamalla lujuuden  $f_{cm}$  paikalle mitoituslujuus  $f_{cd}$ . Raudoituksen ominaisuudet ovat kohdan 3.2.2 mukaiset.
- Toisen asteen teoriaa käyttäen etsitään kuormaa lisäten rajakuorma, joka aiheuttaa pilarin murtumisen.
- Epälineaarinen rajakuorma edustaa suoraan pilarin kestävyyttä eikä sitä tarvitse erikseen arvioida vertaamalla mitoitusvoimasuureita kestävyuteen.
- Ellei tarkempaa mallia ole käytössä, viruminen voidaan ottaa huomioon kertomalla kaikki muodonmuutosarvot betonin jännitys-muodonmuutosfunktiossa luvulla  $(1 + \varphi_{ef})$ .  $\varphi_{ef}$  on tehollinen virumaluku tai virumasuhde:

$$\varphi_{ef} = \varphi(\infty, t_0) \frac{M_{0Eqp}}{M_{0Ed}}$$

$M_{0Eqp}$  = pitkäaikaiskuormien aiheuttama käyttörajatilan momentti,

$M_{0Ed}$  = ensimmäisen asteen teorian mukainen mitoitusmomentti murtorajatilassa.

Tehollinen virumaluku voidaan asettaa nollassi, jos kaikki seuraavat ehdot toteutuvat:

$$\varphi(\infty, t_0) \leq 2, \lambda \leq 75 \text{ ja } M_{0Ed}/N_{Ed} \geq h$$

## 2.2 Pilarin mitoitusvoimasuureet käytettäessä kohtien 5.8.7 ja 5.8.8 mukaisia yksinkertaistettuja menetelmiä = normaalivoima $N_{Ed}$ ja momentti $M_{Ed}$

$M_{Ed}$  = toisen asteen vaikutukset huomioon ottava mitoitusmomentti, jonka suuruus voidaan arvioida:

(a) *Nimellisjäykkyyteen perustuvalla menetelmällä (kohta 5.8.7):*

- Menetelmä perustuu momentin suurennuskertoimen käyttöön (kohta 5.8.7.3).
- Ensimmäisen asteen momenttia  $M_{0Ed}$  kasvatetaan mitoitusmomentiksi epälineaarilla, mitoituskuormasta  $N_{Ed}$  riippuvalla kertoimella.
- Menetelmä on periaatteessa samanlainen kuin SFS-EN 1994-1-1:ssä liittopilareiden käsittelyssä.
- Menetelmä sopii periaatteessa sekä erillispilareihin että kehärakenteisiin, mutta käyttöön liittyy epäselvyyksiä, pääasiassa nimellisen jäykkyyden ja momentin suurennuskertoimen laskemisessa.

(b) *Nimelliskäyritymään tai -kaarevuuteen perustuvalla menetelmällä (kohta 5.8.8):*

- $M_{Ed} = M_{0Ed} + M_2$ ;  $M_2 = N_{Ed}e_2$
- $e_2$  = nimelliskäyritymän aiheuttama epäkeskisyys, joka tuottaa toisen asteen lisätaipumasta aiheutuvan momentin  $M_2$ .
- Menetelmä on perusteiltaan samanlainen kuin Betoninormeissa ja taustoja löytyy mm. standardista BS 8110
- Menetelmä sopii ensisijaisesti erillispilareihin, mutta jos kaarevuudet arvioidaan erikseen jokaisessa kehän pilarissa, se sopii myös kehärakenteisiin.

### 2.2.1 Ensimmäisen asteen määräävä momentti

$M_{0Ed}$  valinta riippuu kehärakenteesta, johon pilari kuuluu. Nimelliskaarevuuteen perustuvaa menetelmää käytettäessä voidaan valita seuraavasti:

- Muut kuin mastojäykistetyin kehän pilarit:  $M_{0Ed} = M_{0e} =$  pilarin päiden momenteista  $M_{01}$  ja  $M_{02}$  laskettava tehollinen momentti ( $|M_{02}| \geq |M_{01}|$ ):

$$M_{0e} = 0,6M_{02} + 0,4M_{01} \geq 0,4M_{02}$$

- Mastopilarit:  $M_{0Ed} =$  pilarin suurin momentti = maston juuressa vaikuttava momentti.

Jos käytetään nimellisjäykkyyteen perustuvaa menetelmää (momentin suurennuskertoimen käyttö, ks. seuraava kohta) momentin  $M_{0Ed}$  tulee olla pilarin suurin momentti tapauksesta riippumatta, kun otetaan huomioon menetelmään liittyvät muut parametrit ( $\beta$  ja  $c_0$ ).

### 2.2.2 Nimellisjäykkyyden käyttöön perustuva menetelmä

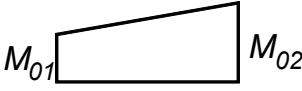
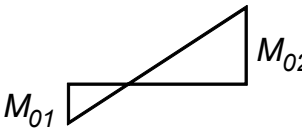
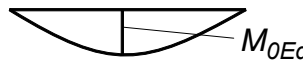
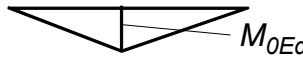
Lisätaipumasta aiheutuva taivutusmomentin suurennus otetaan huomioon korottamalla ensimmäisen asteen tarkastelun mitoitusmomenttia  $M_{0Ed}$  momentin suurennuskertoimen avulla (SFS-EN 1992-1-1, lauseke (5.28)):

$$M_{Ed} = M_{0Ed} \left[ 1 + \frac{\beta}{\frac{N_B}{N_{Ed}} - 1} \right]; \quad \beta = \frac{\pi^2}{c_0}; \quad N_B = \frac{\pi^2 (EI)}{\ell_0^2}$$

Jakaja  $c_0$  ottaa huomioon momenttipinnan muodon. Sen suhteen SFS-EN 1992-1-1 sisältää epäselvyyksiä ja epä johdonmukaisuuksia ja taulukko 2 on Eurokoodista poikkeava (ks. liite 1).

Kun käytetään taulukon 2 mukaisia  $c_0$ -arvoja, ensimmäisen asteen momentti  $M_{0Ed}$ , jota korotetaan on pilarin suurin momentti. EN 1992-1-1 ei sisällä tietoja kertoimen  $c_0$  tarkoituksesta tai taustoista, jotka selitetään tämän kirjoituksen liitteessä 1.

**Taulukko 2:** Kerroin  $c_0$  ja sen kanssa yhdessä käytettävä 1. asteen mitoitusmomentti  $M_{0Ed}$

	$c_0$	Momenttijakautuma $M_{0Ed}$ , johon $c_0$ liittyy	$M_{0Ed}$
(1)	$\frac{12}{1 + 0,5 \frac{M_{01}}{M_{02}}}$		$M_{0Ed} = M_{02} =$ suurin momentti $M_{01}$ ja $M_{02}$ ovat samanmerkkiset ja $M_{02} \geq M_{01}$
(2)	$\frac{12}{1 - 0,5 \left  \frac{M_{01}}{M_{02}} \right }$		$M_{0Ed} = M_{02} =$ itseisarvoltaan suurin momentti $ M_{02}  >  M_{01} $ , $M_{02}$ ja $M_{01}$ ovat erimerkkiset
(3)	9,6		$M_{0Ed} =$ suurin momentti
(4)	12		$M_{0Ed} =$ suurin momentti

Huomautus 1: Taulukon kuvissa esitetyt momenttipinnat ovat pilarin tehollisella pituudella  $\ell_0$  vaikuttavia ja mastopilareissa maston juuri täytyy ajatella momentin maksimikohtaan (tapaukset (3) ja (4), ks. liite 1).

Huomautus 2: Tapaukset (1) ja (2) voidaan myös yhdistää, jos momenttien merkit otetaan huomioon asiaan kuuluvasti. Tapauksesta (1) saadaan myös vakiomomenttiin  $M_{01} = M_{02} = M_{0Ed}$  liittyvä  $c_0 = 12/1,5 = 8$ .

Huomautus 3: Eurokoodi 2 on tässä kohdassa epäselvästi kirjoitettu ja liitteessä 1 esitettävistä perusteista poikkeaviin lopputuloksiin johtava.

Huomautus 4: Kertoimen  $c_0$  perusteet esitetään liitteessä 1. Kertoimet  $\beta$  ja  $c_0$  liittyvät momenttipinnan muotoon, joista lasketaan ensimmäisen asteen taipuma muodossa

$$w_0 = \frac{M_{0Ed} \ell_0^2}{c_0(EI)}$$

*Nimellisjäykkyys (EI), jota käytetään kriittisen normaalivoiman  $N_B$  laskemisessa*

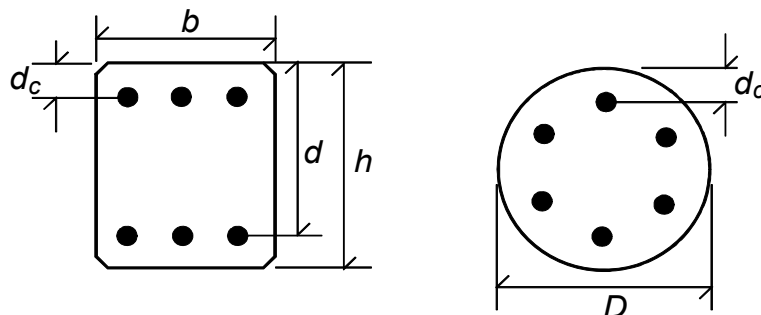
$$\text{Nimellisjäykkyys (EI)} = K_c E_{cd} I_c + K_s E_s I_s; E_{cd} = \frac{E_{cm}}{\gamma_{cE}}; \gamma_{cE} = 1,2$$

$$\text{Kun } \rho \geq 0,002, K_s = 1 \text{ ja } K_c = \frac{k_1 k_2}{1 + \varphi_{ef}}; k_1 = \sqrt{\frac{f_{ck}}{20}}; k_2 = \frac{N_{Ed}}{A_c f_{cd}} \frac{\lambda}{170} \leq 0,20$$

Virumasuhde  $\varphi_{ef} = \varphi(t_0, \infty) \frac{M_{Eqp}}{M_{0Ed}}$  on sama kuin yleisessä menetelmässä.

Huomautus 1: raudoitussuhde  $\rho = 0,002$  on useimmiten pilarin minimiraudoitusta vastaava (SFS-EN 1992-1-1, kohta 9.5.2), eli  $K_s$  ja  $K_c$  voidaan aina laskea yllä olevista lausekkeista, koska käytännön tapauksissa aina  $\rho > 0,002$ .

Jäyhyysmomentit  $I_c$  ja  $I_s$ :



$I_c$  on halkeilemattoman poikkileikkauksen jäyhyysmomentti ja  $I_s$  on pelkän raudituksen jäyhyysmomentti:

$$\square \text{ suorakaidepoikkileikkaus } b \times h, I_c = \frac{bh^3}{12}; I_s = \frac{A_s}{4}(d - d_c)^2$$

- pyöreä poikkileikkaus, halkaisija  $D$ ,  $I_c = \frac{\pi}{64} D^4$ ;  $I_s = \frac{(D - 2d_c)^2}{8} A_s$
- $A_s$  = raudituksen kokonaisala poikkileikkauksessa.

**Huomautus 2:** Kerroin  $k_c$  on pilarin normaalivoiman  $N_{Ed}$  funktio ja taivutusjäykkyys ( $EI$ ) on pienin, kun  $N_{Ed} = 0$ . Taivutusjäykkyys kasvaa normaalivoiman kasvaessa siihen saakka, että  $k_2 = 0,2$ , jolloin  $N_{Ed.lim} = 0,2 A_c f_{cd} \frac{170}{\lambda} = \frac{34}{\lambda} A_c f_{cd}$ . Raja-arvo  $N_{Ed.lim}$  vastaa tapauksesta riippuen normaalivoimaa  $(0,7 \dots 0,8) N_B$ .

**Huomautus 3:** SFS-EN 1992-1-1 kohdan 5.8.7.2(3) mukainen nimellisen taivutusjäykkyyden arvo  $(EI)_c = \frac{0,3 E_{cd} I_c}{1 + 0,5 \varphi_{ef}}$  vastaa käytännön rauditussuhteita käytettäessä

samaa kuin nimellisjäykkyys normaalivoiman ollessa nolla (kerroin  $K_c$  on normaalivoiman funktio ja saavuttaa suurimman arvonsa kun  $k_2 = 0,2$ , ks. esimerkki 3).

### 2.2.3 Nimelliskaarevuuden käyttöön perustuva menetelmä

Toisen asteen vaikutus otetaan huomioon lisämomenttina  $M_2$ , jonka oletetaan aiheutuvan lisätaipumaa vastaavasta epäkeskisyydestä  $e_2$ :

$$M_{Ed} = M_{0Ed} + M_2, M_2 = N_{Ed} e_2, e_2 = \frac{1}{r} \frac{\ell_0^2}{c}$$

- Jos pilarin päissä on erisuuret momentit  $M_{01}$  ja  $M_{02}$ ,  $M_{0Ed} = M_{0e} = 0,6 M_{02} + 0,4 M_{01}$ .  $|M_{02}| \geq |M_{01}|$  ja aina  $M_{0Ed} \geq 0,4 M_{02}$ .
- $\frac{1}{r}$  on nimellinen kaarevuus tai käyritymä pilarin eniten plastisoituvassa kohdassa (mitoituksessa käytettävän momentin  $M_{Ed}$  vaikutuskohdassa).
- Jakaja  $c$  riippuu kaarevuuden tai käyritymän plastisesta jakaantumismuodosta ja on analoginen kertoimen  $c_0$  kanssa, ottaen kuitenkin huomioon, että  $c_0$  riippuu vain 1. asteen kaarevuuden jakaantumismuodosta (ks. liite 1). Kun momentti on vakio pilarin pituudella,  $c = c_0 = 8$ .  $c = \pi^2$  vastaa sini-muotoista käyritymäjakautumaa.
- Kun poikkileikkaus on muuttumaton koko pilarin pituudella,  $c = 10$  edustaa tarpeellisella tarkkuudella kaikkia muuttuvia momenttijakautumia ( $M_{01} \neq M_{02}$ ).
- $\frac{1}{r} = K_r K_\varphi \frac{2,2 f_{sd}}{d E_s}$ . Jos rauditus on epäsymmetrinen tai jakaantunut pilarin

$$\text{jokaiselle sivulle, } d = \frac{h}{2} + i_s; \quad i_s = \sqrt{\frac{\sum r_i^2 A_{si}}{A_s}}, \quad r_i \text{ on kunkin tangon } A_{si}$$

keskiöetäisyys poikkileikkauksen painopisteaksellilta.

- Jos raudoitus sijaitsee aikaisemman kuvan mukaisesti,  $d$  on kuten kuvassa vaikka, ylä- ja alareunalla olisi erilainen raudoituksen määrä. Pystysivuilla olevien tankojen vaikutus  $d$ :n suuruuteen on useimmiten merkityksetön ja  $d$  voidaan asettaa tavanomaisesti kuten edellisessä kuvassa.

- $$K_r = \frac{1 + \omega - \frac{N_{Ed}}{A_c f_{cd}}}{0,6 + \omega} \leq 1; \quad \omega = \frac{A_s f_{sd}}{A_c f_{cd}}.$$
  $K_r$  on normaalivoiman  $N_{Ed}$  funktio, mutta sen suuruutta rajoitetaan asettamalla ylärajaksi 1. Esimerkiksi, jos  $\omega = 0,25$ , yläraja saavutetaan, kun  $N_{Ed} = 0,35 A_c f_{cd}$ .

- $$K_\varphi = 1 + \varphi_{ef} \left( 0,35 + \frac{f_{ck}}{200} - \frac{\lambda}{150} \right) \geq 1; \quad \lambda = \frac{\ell_0}{i}.$$

### Tärkeä huomautus:

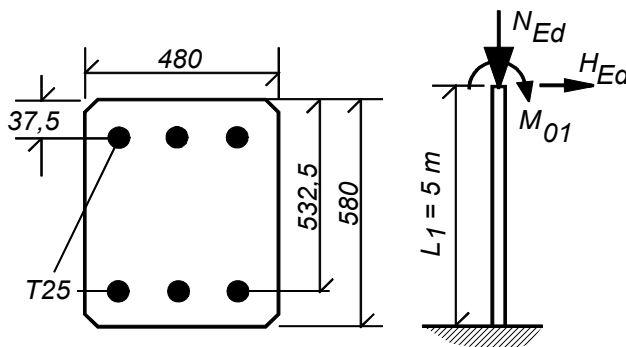
*Nimelliskaarevuuteen perustuva menetelmä ja nimellisjäykkyyteen perustuva menetelmä eivät ole samanarvoisen tuloksen antavia muuten kuin erikoistapauksissa (= tietyillä  $N_{Ed}/(A_c f_{cd})$  arvoilla, jotka ovat tehollisesta pituudesta  $\ell_0$  riippuvia). Betoninormien kanssa samanarvoisen lopputulos saadaan käyttämällä nimelliskaarevuuteen perustuvaa menetelmää, koska molempien taustat ovat samat.*

*Nimelliskaarevuuteen perustuva menetelmä on samanlainen kuin vanha BS8110 menetelmä (ks. liite 2).*

*Eurokoodissa analyysimenetelmän valinta on asetettu kansallisesti valittavaksi. Suomen kansallisessa liitteessä vastuu valinnasta on säilytetty suunnittelijalle, mutta suunnittelijan on silloin ymmärrettävä menetelmän eroavuuksien taustat.*

Esimerkissä 3 vertaillaan yksinkertaistettujen menetelmien eroja.

### Esimerkki 3: Toisen asteen vaikutukset suorakaidepilarissa



Tarkastellaan, kuinka paljon toisen asteen vaikutus lisää ensimmäisen asteen lineaariseen tarkasteluun perustuvaa mitoitusmomenttia  $M_{0Ed}$  mastopilarissa, jonka pituus  $L_1 = 5$  m ja  $b \times h = 480 \times 580$ . Pilarissa on raudoitus 6T25 ( $\phi = 25$ , betonipeite  $c = 35$  mm,  $d = 532,5$  mm).

Oletetaan, että  $\ell_0 = 2,2L_1$  ja kuorman perusepäkeskisyyss  $e_0 = h/30$ , kuitenkin aina  $\geq 20$  mm. Jos  $h = 580$  mm, perusepäkeskisyyss  $e_0 = 20$  mm. Sitä ei kuitenkaan tarvitse käyttää pilarin kokonaistarkastelussa, jossa ensimmäisen asteen momenttien oletetaan aiheutuvan kuorman  $N_{Ed}$  tuontikohdassa vaikuttavasta momentista  $M_{01}$ .

pilarin vaakavoimasta ja vinoudesta. Poikkileikkausta ei koskaan saa mitoittaa pelkästään normaalivoiman suhteen, vaan muun taivutuksen puuttuessa  $M_{Ed} = N_{Ed}e_0$ .

- Normaalivoima  $N_{Ed} = 1000$  kN ja pilarin yläpäähän vaikuttava vaakavoima  $H_{Ed} = 30$  kN sekä  $M_{01} = 20$  kNm.
- Betoni C35/45,  $E_{cm} = 34077$  MPa,  $\varphi_{ef} = 2$ . Rakenne vastaa Betoninormien rakenneluokkaa 1 (tehdasvalmistettu elementti):  $\gamma_{s,red} = 1,1$  ja  $\gamma_{c,red} = 1,35$

- $\frac{N_{Ed}}{A_c f_{cd}} = 0,163$ ,  $\omega = 0,221$ .

- Momentti  $M_{0Ed}$  aiheutuu vaakavoimasta  $H_{Ed}$ , pilarin vinoudesta ja yläpään momentista  $M_{01}$ . Vinous on  $\theta_i = \theta_0 \alpha_h \alpha_m$

- Käytetään  $\alpha_m = 1$ .  $\theta_0 = 1/200$  ja  $\alpha_h = \frac{2}{\sqrt{L_1}} \leq 1$ . Kun  $L_1 = 5$  m,  $\alpha_h = 0,89$ .

Epätarkkuudesta (vinous  $\theta_i$ ) johtuva kuorman epäkeskisyys on  $e_i = \theta_i \ell_0 / 2 = 0,89 \times 2,2 \times 5000 / (200 \times 2) = 24,6$  mm ja ensimmäisen asteen momentti pilarin alapäässä on  $M_{02} = M_{01} + N_{Ed}e_i + H_{Ed}L_1 = 194,6$  kNm. Ensimmäisen asteen momentti pilarin yläpäässä on  $M_{01} = 20$  kNm.

- Ensimmäisen asteen mitoitusmomentti nimelliskaarevuuden menetelmässä on  $M_{0e} = 0,6M_{02} + 0,4M_{01} = 124,7$  kNm (SFS-EN 1992-1-1 kohta 5.8.8.2(2)). Otetaan lisäksi huomioon, että toisen asteen vaikutukset mastoissa kohdistuvat suurimpaan momenttiin, eli  $M_{02} = 194,6$  kNm.
- Ensimmäisen asteen mitoitusmomentti nimellisjäykkyyden menetelmässä on  $M_{0Ed,ns2} = M_{02} = 194,6$  kNm. (Poikkeaa SFS-EN 1992-1-1 kohdan 5.8.7.3(1) viittauksesta kohtaan 5.8.8.2(2))

- Nimelliskaarevuusmenetelmää varten lasketaan lisäepäkeskisyys  $e_2$

$$e_2 = K_r K_\varphi \frac{2,2 f_{sd}}{d E_s} \ell_0^2; K_r = \frac{1 + \omega - \frac{N_{Ed}}{A_c f_{cd}}}{0,6 + \omega} \leq 1; \omega = \frac{A_s f_{sd}}{A_c f_{cd}} = 0,221; \frac{N_{Ed}}{A_c f_{cd}} = 0,163$$

$$K_\varphi = 1 + \varphi_{ef} \left( 0,35 + \frac{f_{ck}}{200} - \frac{\lambda}{150} \right) \geq 1; \lambda = \frac{\ell_0}{i} = \frac{2,2 L_1}{h / \sqrt{12}} = 7,62 \frac{L_1}{h} = 66 > \lambda_{lim}$$

- $K_r = \frac{1,221 - \frac{N_{Ed}}{A_c f_{cd}}}{0,821} \leq 1 \Rightarrow K_r = 1; K_\varphi = 1,179; \frac{f_{sd}}{E_s} = \frac{2,5}{1,1} \times 10^{-3} = 2,27 \times 10^{-3};$

$$e_2 = 1,179 \times 2,2 \times 2,27 \times 10^{-3} \times 2,2^2 \frac{L_1^2}{10d} = 0,00285 \frac{L_1^2}{d} = 134 \text{ mm}$$

- $M_{Ed,nc} = M_{0e} + e_2 N_{Ed}; M_{Ed,nc} = 258,7$  kNm
- Jos vaikutus kohdistuu pilarin suurimpaan momenttiin, mitoitusmomentti on  $M_{Ed,nc2} = M_{02} + e_2 N_{Ed} = 328,6$  kNm.

- Nimellisjäykkyysmenetelmä varten tarvitaan nimellisjäykkyys  $(EI) = K_c E_{cd} I_c + K_s E_s I_s$ . Rauditus 6T25 ( $\phi = 25$ , betonipeite  $c = 35$  mm), eli  $\rho = 0,011 > 0,002$ , jolloin  $K_s = 1$  ja  $K_c = \frac{k_1 k_2}{1 + \varphi_{ef}}$ .  $\lambda = \sqrt{12} \frac{\ell_0}{h}$ ,  $k_1 = \sqrt{\frac{f_{ck}}{20}} = 1,323$  ja  $k_2 = \frac{N_{Ed}}{A_c f_{cd}} \frac{\lambda}{170} = 0,063$ ,  $\rightarrow K_c = 0,028$ . Nimellisjäykkyyden osat ovat  $K_c E_{cd} I_c = \frac{1,323 \times 0,063}{1 + \varphi_{ef}} \frac{E_{cm}}{1,2} I_c = \frac{E_{cm} I_c}{9,26(1 + \varphi_{ef})} = 6,19$  MNm<sup>2</sup> ja  $E_s I_s = 0,25 E_s (d - c - \frac{\phi}{2})^2 A_s = 34,64$  MNm<sup>2</sup>  $\rightarrow (EI) = K_c E_{cd} I_c + K_s E_s I_s = 6,19 + 34,64 = 40,83$  MNm<sup>2</sup>.

- Kriittinen normaalivoima  $N_B = \frac{\pi^2 (EI)}{\ell_0^2} = 3330$  kN ja  $\frac{N_B}{N_{Ed}} = 3,33$

- Kerroin  $c_0 = \frac{12}{1 + 0,5 \frac{M_{01}}{M_{02}}} = 11,4$  ja  $\beta = \pi^2 / c_0 = 0,865$

- $M_{Ed,ns} = M_{02} \left[ 1 + \frac{\beta}{\frac{N_B}{N_{Ed}} - 1} \right] = 1,371 \times M_{02} = 266,8$  kNm

### Lopputuloksien vertailu

Pilari mitoitetaan Eurokoodi 2 mukaan normaalivoimalle  $N_{Ed} = 1000$  kN ja momentille  $M_{Ed,nc}$  tai  $M_{Ed,ns}$ , jotka esitetyllä tavalla tarkasteltuna ovat lähellä toisiaan.

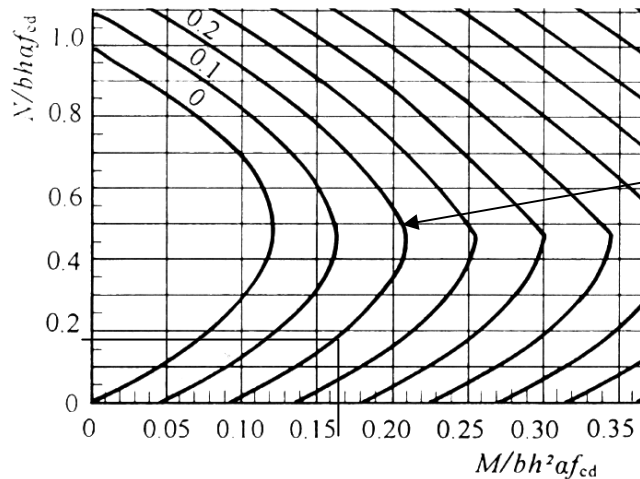
- Nimelliskaarevuuden menetelmä:  $M_{Ed,nc} = 258,7$  kNm (kuitenkin  $M_{Ed,nc2} = 328,6$  kNm, jos korotetaan suurinta momenttia).
- Nimellisjäykkyyteen perustuva menetelmä  $M_{Ed,ns2} = 266,8$  kNm.

- Yhteisvaikutusdiagrammien käyttöä varten suhteellinen momentti  $\mu = \frac{M_{Ed}}{bh^2 f_{cd}}$  on

tarpeellisella tarkkuudella sama, käytettiinpä kumpaa tahansa momenttia  $M_{Ed,nc}$  tai  $M_{Ed,ns}$ ,  $\mu = 0,075$ . Pilarissa  $\omega = 0,22$  ja  $(h-d)/h = 0,082$ . Diagrammeista 8.1/Design Aids for Eurocode 2 (ks. seuraava kuva) voidaan todeta, että pilarin kestävyys on riittävä tarkastelluille voimasuureille:  $\nu = \frac{N_{Ed}}{A_c f_{cd}} = 0,165$  ja  $\mu \leq 0,14$ .

Momenttia  $M_{Ed,nc2}$  vastaava  $\mu = 0,092 < 0,14$ .





Mitoituskäyrän  $\omega = 0,2$  mukaan pilarin rauditus riittää suhteellisille momenteille  $\mu \leq 0,14$ , kun  $\nu \geq 0,1$ .

(Chart 8.1/Design Aids for Eurocode 2, Taylor & Francis 2007)

**Huomautus 1:** Mitoitusmomentin suuruus riippuu merkittävästi toisen asteen momentin arvioimisesta, joka on erilainen valitun tarkastelutavan mukaan. Asiaan vaikuttaa  $c_0$ :n suuruus ja sen kanssa yhdessä käytettävä  $M_{0Ed}$ . Erot lopputuloksien välillä olisivat merkittävästi suuremmat, jos mitoitusmomenteja tulkitaan nimellisjäykkyyden menetelmässä suoraan Eurokoodin 2 mukaisesti tai nimelliskaarevuuden menetelmässä käytettäisiin mitoitusmomenttina  $M_{02} + e_2 N_{Ed}$ :

- Nimellisjäykkyyden menetelmässä suurennettu momentti suoraan Eurokoodin 2 mukaisesti  $= M_{Ed.ns} = M_{0e} \left( 1 + \frac{\pi^2}{8} \frac{1}{2,33} \right) = 190,7 \text{ kNm}$
- Nimellisjäykkyyden menetelmän suurennettu momentti esitetyn teorian mukaisesti  $= M_{Ed.ns2} = M_{02} \left( 1 + \frac{\pi^2}{11,4} \frac{1}{2,33} \right) = 266,8 \text{ kNm}$
- Nimelliskaarevuuden menetelmässä suurennettu momentti ekvivalenttia momenttia kasvattamalla on  $M_{Ed.nc} = M_{0e} + N_{Ed}e_2 = 258,7 \text{ kNm}$ , mutta jos  $M_{0e}$ :n sijasta käytetään momenttia  $M_{Ed.nc2} = M_{02} + N_{Ed}e_2 = 328,6 \text{ kN}$ . Tämä vastaa Betoninormien mukaista mitoitusmomenttia (ks. vertailu seuraavassa kohdassa).

**Huomautus 2:** Mastopilareissa on menetelmästä riippumatta kyseenalaista tarkastella momentteja ekvivalentin arvon  $M_{0e}$  perusteella, koska toisen asteen vaikutukset suurentavat nimenomaan momenttia  $M_{02}$ . Muissa kuin mastopilareissa Eurokoodin mukaista ekvivalenttia momenttia voidaan käyttää, kun lisäksi tarkistetaan, että  $M_{Ed.nc} \geq M_{02}$ .

#### Toisen asteen vaikutukset ja mitoitusmomentti normaalivoiman muuttuessa

Pilarin mitoitusmomentin  $M_{Ed}$  vaihtelua voidaan tarkastella muuttamalla normaalivoiman  $N_{Ed} < N_B$  suuruutta. Seuraavassa kuvassa esitetään esimerkin 3 pilariin liittyvä suhteellinen momentti  $\mu = M_{Ed}/(bh^2f_{cd})$  suhteellisen normaalivoiman  $x = N_{Ed}/(bhf_{cd})$  funktiona eri tarkastelutapoja käytettäessä.

### *Nimellisjäykkyysmenetelmä - EC.ns2:*

Käytetään momentinsuurennuskertoimeen sisältyvässä  $\beta$ -kertoimessa  $c_0$ -arvoja, jotka esitetään liitteessä 1:  $c_0 = \frac{12}{0,5 \frac{M_{01}}{M_{02}} + 1}$  ja  $M_{0Ed} = M_{02}$  = pilarin suurin momentti.

### *Nimelliskaarevuusmenetelmä - EC.nc2:*

Toisen asteen momentti, joka on määräävä, lasketaan pilarin suurimman ensimmäisen asteen momentin perusteella, eli  $M_{0Ed} = M_{02}$  ja  $M_{Ed} = M_{02} + e_2 N_{Ed}$ .

### *Toisen asteen taipumien menetelmä - EC.sot:*

Mitoitusmomentti lasketaan kokonaistaipuman  $w_{max} = w_0 + \Delta w$  perusteella,  $M_{Ed} = M_{0Ed} + N_{Ed} w_{max}$ . Taipuma  $w_0$  lasketaan nimellisjäykkyyden perusteella ja lisätaipuma  $\Delta w$  jäykkyyden  $(EI)_2$  perusteella,  $(EI)_2 = \frac{(EI)_c}{1 + \sqrt{\frac{N_{Ed}}{N_B}}}$  (ks. liite 1).

### *Nimellisjäykkyysmenetelmä ja nimelliskaarevuusmenetelmä - EC.ns ja EC.nc:*

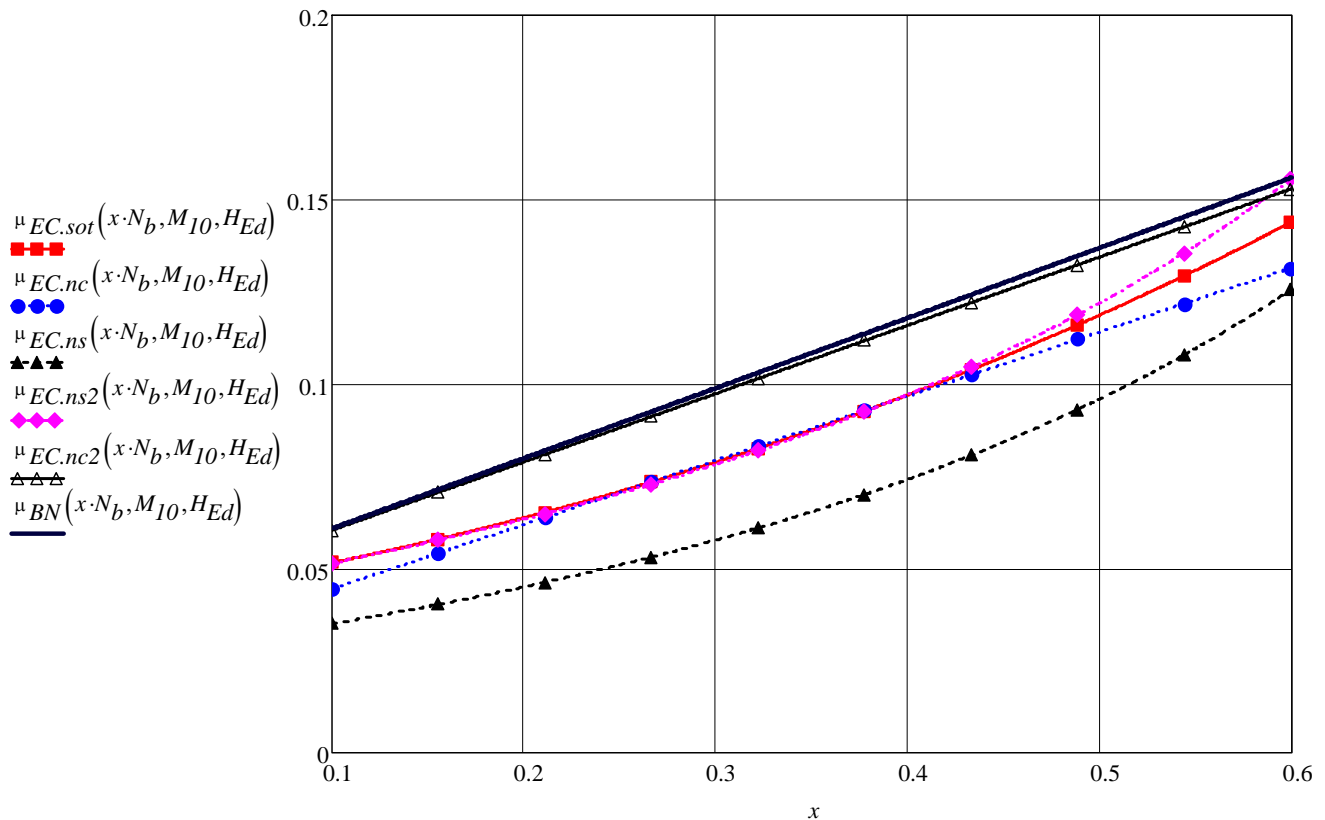
Suurennettava momentti  $M_{0Ed} = M_{0e} = 0,6M_{01} + 0,4M_{02}$  ja  $c_0 = 8$ .

### *Betoninormien nimelliskaarevuuteen perustuva menetelmä - BN*

$M_{0Ed} = M_{02}$  ja  $e_{2,BN} = \left(\frac{\lambda}{145}\right)^2 h + \frac{\ell_0}{500} + \frac{h}{20}$ . Lisäepäkeskisyyss  $e_{2,BN}$  on vastaavan suuruinen kuin  $e_2$  Eurokoodin nimelliskaarevuusmenetelmässä.

Kuva E.3 osoittaa, että:

- Suhteelliset momentit  $\mu_{EC.ns2}$ ,  $\mu_{EC.sot}$  ja  $\mu_{EC.nc}$  ovat toisiaan vastaavia, kun  $N_{Ed}/N_B = 0,1 \dots 0,5$ .
- Suhteelliset momentit  $\mu_{EC.nc2}$  ja  $\mu_{BN}$  vastaavat toisiaan kaikilla normaalivoiman arvoilla.
- Suhteellinen momentti  $\mu_{EC.ns}$  on selvästi kaikkia muita tapauksia pienempi.



**Kuva E3:** Mitoitusnormaalivoimaa  $N_{Ed} = xN_B$  vastaava mitoitusmomentti, kun toisen asteen vaikutuksia tarkastellaan eri tavoin.  $M_{10} = 20$  kNm ja  $H_{Ed} = 30$  kN. *EC.nc* = nimelliskaarevuusmenetelmä, *EC.ns* = nimellisjäykkyysmenetelmä, *EC.sot* = toisen asteen taipumien menetelmä, *EC.ns2* = nimellisjäykkyysmenetelmä, jossa momentin suurennus kohdistuu suurimpaan momenttiin  $M_{02}$ , *EC.nc2* = nimelliskaarevuusmenetelmä, jossa momentin suurennus kohdistuu momenttiin  $M_{02}$ , *BN* = Betoninormien nimelliskaarevuusmenetelmä.

#### Johtopäätös:

Mastopilareissa suurennettavana momenttina tulee käyttää maston juuressa vaikuttavaa suurinta momenttia, jota toisen asteen vaikutukset kasvattavat. Liitteen 1 mukaisesti ekvivalentti momentti tai kasvatettava momentti  $M_{0Ed}$  on riippuvainen siitä kuinka kerroin  $c_0$  asetetaan (ks. lausekkeet (L1) liitteessä 1).

## Vino taivutus (kohta 5.8.9)

Vino taivutus tarkoittaa taivutusta kahdessa pääsuunnassa  $y$  ja  $z$ . Taivutus voi syntyä epäkeskisestä kuormituksesta, mutta epätarkkuuksien aiheuttamaa taivutusta tarvitsee tarkastella vain toisessa pääsuunnassa = suunnassa, jossa kuormituksen epäkeskisyys tai taivutusmomentti on suurempi (kohta 5.8.9(2)).

- Pyöreissä pilareissa ei tarkastella vinoa taivutusta, vaan eri suunnissa vaikuttavat taivutusrasitukset yhdistetään rezultoivaksi taivutukseksi. Suorakaidepilareissa riittää usein perustarkastelu toisiaan vastaan kohtisuorissa suunnissa.
- Mitoitusrasitukset määritellään erikseen  $y$ - ja  $z$ -suunnissa. Mitoitusehtojen tulee myös toteutua molemmissa suunnissa.
- Normaalivoiman suhteellinen epäkeskisyys pääakselien suunnissa on  $e_y/h$  ja  $e_z/b$  ja pilarin hoikkuus eri suunnissa on  $\lambda_y$  ja  $\lambda_z$ .
- Jos  $\lambda_y/\lambda_z \leq 2$  ja  $\lambda_z/\lambda_y \leq 2$  ja  $\frac{e_y/h}{e_z/b} \leq 0,2$  tai  $\frac{e_z/b}{e_y/h} \leq 0,2$ , ei muita tarkistuksia tarvita.

- Muussa tapauksessa on osoitettava, että ehto  $\left(\frac{M_{Edz}}{M_{Rdz}}\right)^a + \left(\frac{M_{Edy}}{M_{Rdy}}\right)^a \leq 1$  toteutuu.

Momenteissa  $M_{Edz}$  ja  $M_{Edy}$  täytyy olla mukana toisen asteen vaikutukset (lisäepäkeskisyyden  $e_2$  aiheuttama momentti). Potenssi  $a$  riippuu normaalivoiman  $N_{Ed}$  suuruudesta:

$N_{Ed}/(A_c f_{cd} + A_s f_{sd})$	0,1	0,7	1,0
$a$	1	1,5	2

## LIITE 1: Kerroin $c_0$ ja $\beta = \pi^2/c_0$ Eurokoodi 2 nimellisjäykkyyden menetelmässä

Toisen asteen vaikutuksia tarkasteltaessa käytetään normaalivoimasta riippuvaa taivutusjäykkyyden arvoa ( $EI$ ), joka on pienempi kuin ehyen poikkileikkauksen alkujäykkyys ja lasketaan ottaen huomioon halkeilu, materiaalien epälineaariset ominaisuudet ja viruma.

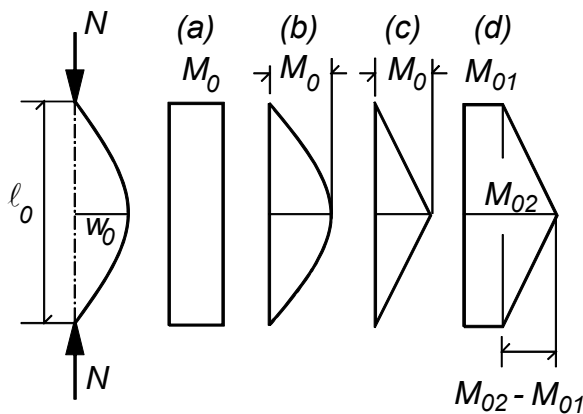
Jotta menetelmää voidaan käyttää koko kehärakenteeseen, tarvitsee suorittaa ensimmäisen asteen tarkastelu käyttäen pilareiden nimellistä jäykkyyttä ( $EI$ ) ja sen jälkeen saadut ensimmäisen asteen momentit  $M_{0Ed}$  korotetaan ottamaan huomioon toisen asteen vaikutus:

$$M_{Ed} = \eta M_{0Ed}; \quad \eta = 1 + \frac{\beta}{\frac{N_B}{N_{Ed}} - 1}; \quad \beta = \frac{\pi^2}{c_0}; \quad N_B = \frac{\pi^2 (EI)}{\ell_0^2} \quad (L1)$$

$N_B$  on kriittinen normaalivoiman arvo, jota vastaava taipuma ja taivutusmomentti pilarin määräävässä kohdassa kasvavat äärettömiksi.  $\ell_0$  on tehollinen pituus, jota käytettäessä oletetaan, että pilarin kokonaistaipumaa  $w(x)$  tai ensimmäisen asteen taipumaa  $w_1(x)$  (= pilarin 1. asteen taivutusmomenteista aiheutuva taipuma) voidaan kuvata sini-funktiolla pituudella  $x = 0 \dots \ell_0$ :

$$w(x) = w_{max} \sin \frac{\pi x}{\ell_0} \quad \text{ja} \quad w_1(x) = w_0 \sin \frac{\pi x}{\ell_0}. \quad (L2)$$

$c_0$  ottaa huomioon ensimmäisen asteen momenttien jakaantumisen pilarin tehollisella pituudella, mutta sen merkitystä ei esitetä missään Eurokoodissa tai niiden tausta-asiakirjoissa. Tarkastellaan sitä varten seuraavan kuvan mukaisia tapauksia (a) ... (d).



**Kuva L1.1**

- (a) vakio momenttijakautuma
- (b) parabolinen momenttijakautuma
- (c) lineaarisesti muuttuva symmetrinen momenttijakautuma, ns. kolmiomomenttijakautuma
- (d) lineaarisesti muuttuva symmetrinen momenttijakautuma, ns. puolisuunnikasjakautuma

Jokaisessa tapauksessa suurin momentti on  $M_0$  tai  $M_{02}$  ja pienin momentti  $M_{01}$ . Vakiotapauksessa (a)  $M_{02} = M_{01} = M_0$  ja tapauksissa (b) ja (c)  $M_{01} = 0$ . Kun taipuma  $w_0$  esitetään aina muodossa  $w_0 = \frac{M_0 \ell_0^2}{c_0 (EI)}$ , kertoimelle  $c_0$  täytyy etsiä momenttipinnan muodosta riippuva arvo, jonka suuruus vaihtelee seuraavasti:

$$(a)\text{-tapaus: taipuma } w_0 = \frac{M_0 \ell_0^2}{8(EI)} = \frac{M_0 \ell_0^2}{c_0(EI)}, c_0 = 8$$

$$(b)\text{-tapaus: taipuma } w_0 = \frac{5 p \ell_0^4}{384 (EI)} = \frac{5 \times 8 M_0 \ell_0^2}{384 (EI)} \text{ koska } p = \frac{8M_0}{\ell_0^2} \text{ ja } c_0 = 384/40 = 9,6$$

$$(c)\text{-tapaus: taipuma } w_0 = \frac{1 P \ell_0^3}{48 (EI)} = \frac{4 M_0 \ell_0^2}{48 (EI)} \text{ koska } P = \frac{4M_0}{\ell_0} \text{ ja } c_0 = 48/4 = 12$$

$$(d)\text{-tapaus: } w_0 = \frac{M_{01} \ell_0^2}{8(EI)} + (M_{02} - M_{01}) \frac{\ell_0^2}{12(EI)} = \frac{M_{0E} \ell_0^2}{c_0(EI)}, \text{ jota voidaan esimerkiksi muokata muotoon } w_0 = \frac{\ell_0^2}{8(EI)} (0,33M_{01} + 0,67M_{02}).$$

Siten  $c_0 = 8$  ja sitä vastaava  $M_{0E}$  on tässä esitysmuodossa  $M_{0E} = 0,33M_{01} + 0,67M_{02}$  (tämä ei ole sama kuin  $M_{0e}$  EN 1992-1-1 kohdassa 5.8.8.2(2)).

Jos kuitenkin valitaan jokin muu edustava momentti,  $c_0$  muuttuu vastaavasti. Jos taipuma esitetään momentista  $M_{02}$  riippuvana,  $c_0 = \frac{12}{0,5 \frac{M_{01}}{M_{02}} + 1}$ , koska

$$w_0 = \frac{M_{02} \ell_0^2}{12(EI)} \left( 0,5 \frac{M_{01}}{M_{02}} + 1 \right). \text{ Tästä muodosta saadaan myös (a)- ja (c)-tapauksien}$$

kertoimet, kun (a)-tapauksessa  $M_{01} = M_{02}$  ( $c_0 = 12/1,5 = 8$ ) ja (c)-tapauksessa  $M_{01} = 0$  ( $c_0 = 12$ ).

### Kertoimen $c_0$ suuruus Eurokoodi 2:ssa

SFS-EN 1992-1-1 ei esitä selkeää ja johdonmukaista yhteyttä  $c_0$  ja ensimmäisen asteen momentin  $M_{0Ed}$  välille muuten kuin edellä käsitellyissä tapauksissa (a) ... (c) (kohta 5.8.7.3(2), jossa muut tapaukset kuitataan viittauksella "jne."). Kun pilarin momentit  $M_{01}$  ja  $M_{02}$  ovat erisuuret, lasketaan *nimelliskaarevuuden menetelmässä* ekvivalentti momentti  $M_{0e} = 0,6M_{02} + 0,4M_{01} \geq 0,4M_{02}$ . Kohdan 5.8.7.3(1) mukaan ekvivalenttia vakiomomenttia  $M_{0e}$  voidaan käyttää myös lausekkeessa (5.28), joka vastaa lausekkeitä (L1). Tähän liittyvä  $c_0 = 8$ , mutta lopputulos poikkeaa kuormitustasosta riippuen enemmän tai vähemmän siitä, mitä seuraavan kohdan mukaisesta tarkastelusta saadaan.

### Kertoimen $\beta$ suuruus

$$\text{Yhtälöissä (L1) } \beta = \frac{\pi^2}{c_0} \text{ ja}$$

$$(a)\text{-tapauksessa } \beta = 1,234$$

(b)-tapauksessa  $\beta = 1,03 \approx 1$

(c)-tapauksessa  $\beta = 0,822$

(d)-tapauksessa  $\beta = 1,234$ , jos ekvivalentti momentti  $M_{0E} = 0,33M_{01} + 0,67M_{02}$

(d)-tapauksessa  $\beta = \frac{\pi^2}{12} \left( 0,5 \frac{M_{01}}{M_{02}} + 1 \right)$ , jos ekvivalentti momentti  $M_{0E} = M_{02} = M_{0Ed}$ .

Jos momentin suurennuskerroin  $\eta$  esitetään yhtälön (L1) mukaisessa muodossa, on käytettävä jälkimmäistä (d)-tapauksen esitystapaa, johon silloin sisältyvät myös tapaukset (a) ( $M_{01} = M_{02} = M_{0Ed}$ ) ja (c) ( $M_{01} = 0, M_{02} = M_{0Ed}$ ). Esimerkiksi, jos  $M_{01}/M_{02} = 0,2, \beta = 0,905$ .

*Toisen asteen vaikutukset huomioon ottava mitoitusmomentti  $M_{Ed}$  taipumien perusteella*

Yhtälöiden (L1) perusteet voidaan tutkia tarkemmin taipumia tarkastelemalla, jotta nähdään, mitä tehollinen pituus  $\ell_0$  tarkoittaa. Ensimmäisen asteen taipuman  $w_1(x)$  suurin arvo  $w_0$  lasketaan pienten taipumien teorian mukaan (esim. Mohrin taipuma-analogia) ja  $w(x)$  on pilarin kokonaistaipuma, kun toisen asteen vaikutus on lisätty. Suurin kokonaistaipuma on  $w_{max}$

$$w_{max} = w_0 + \Delta w \quad (L3)$$

Kun taipumaviivaa  $w(x)$  kuvataan sini-funktiolla, Mohrin taipuma-analogian perusteella toisen asteen taipumalisäys suurimman taipuman kohdalla on:

$$\Delta w = \frac{N_{Ed} w_{max} \ell_0^2}{\pi^2 (EI)} = \frac{N_{Ed}}{N_B} w_{max} \text{ ja } N_B = \frac{w_{max}}{\Delta w} \quad (L4)$$

Kokonaistaipuma on silloin

$$w_{max} = w_0 + \frac{N_{Ed}}{N_B} w_{max}, \text{ josta } w_{max} = w_0 \frac{1}{1 - \frac{N_{Ed}}{N_B}} \quad (L5)$$

Taipuman maksimikohdassa taivutusmomentti on toisen asteen teorian mukaisesti

$$M_{Ed} = M_{0Ed} + N_{Ed} w_{max} \text{ eli } \frac{M_{Ed} - M_{0Ed}}{N_{Ed}} = w_0 \frac{N_B}{N_B - N_{Ed}} \quad (L6)$$
$$M_{Ed} = M_{0Ed} + w_0 \frac{N_B}{\frac{N_B}{N_{Ed}} - 1} = M_{0Ed} \left( 1 + \frac{\frac{w_0}{M_{0Ed}} N_B}{\frac{N_B}{N_{Ed}} - 1} \right)$$

missä taipuma  $w_0/M_{0Ed}$  on aikaisemman tarkastelun mukaisesti aina muotoa  $\frac{w_0}{M_{0Ed}} = \frac{\ell_0^2}{c_0(EI)}$  ja  $N_B = \frac{\pi^2(EI)}{\ell_0^2}$ , eli  $\frac{w_0}{M_{0Ed}} N_B = \frac{\pi^2}{c_0}$ . Kun tämä sijoitetaan yhtälöön

(L6), päästään yhtälön (L1) mukaiseen esitykseen, joka on Eurokoodin esitystapa.

Tässä  $M_{0Ed}$  ja samalla  $c_0$  täytyy olla toisiaan vastaavia ( $c_0$  suuruus on verrannollinen momenttiin  $M_{0Ed}$  ja momenttipinnan muotoon).

Yhtälö (L6) ja sen johtaminen perustuu kirjoitukseen:

Knauff, M. and Klempka, K., Effective Lengths of Reinforced Concrete Columns in Single-Storey Frame Structures in the Light of the Eurocode. Technical Sciences, No 12, 2009

Yhtälö (L6) edellyttää, että kaikki taipumat voidaan laskea riittävän tarkasti. Taipumien avulla esitettyä mitoitusmomentti on  $M_{Ed,II} = M_{0Ed} + N_{Ed}w_{max}$ . Tällöin ei periaatteessa tarvita pilarin tehollista pituutta, joka voi aiheuttaa sekaannuksia, mutta pilarin kiinnityksien suuruudet on arvioitava realistisesti ja ne vaikuttavat taipuman suuruuteen.

*Taipumien laskemisessa käytettävä nimellinen jäykkyys (EI)*

EN 1992-1-1 kohdan 5.8.7.2 mukainen nimellinen taivutusjäykkyys ( $EI$ ) edustaa pilarin halkeilua, pitkäaikaisvaikutuksia ja plastisoitumista. EN 1992-1-1 kohdan 5.8.8 nimelliskaarevuus perustuu muodonmuutosjakautumaan, jossa vedetty rauditus myötää juuri ja puristetulla reunalla muodonmuutos on pienempi kuin 0,35 %. Tästä muodonmuutosjakautumasta voidaan laskea poikkileikkauksen kestävä normaalivoima ja taivutusmomentti sekä muodonmuutosyhdistelmään liittyvä taivutusjäykkyys. Sen suuruusluokka osoittautuu samaksi kuin nimellinen jäykkyys ( $EI$ ). Toisen asteen taipuman laskemisessa käytettävä taivutusjäykkyys on  $(EI)_2$  ja sen suuruutta voidaan arvioida suhteessa jäykkyyteen ( $EI$ ) käyttämällä erilaisia normaalivoimasta riippuvia pienennysfunktioita:  $(EI)_2 < (EI)$ . Yksi varmallalla puolella oleva tapa on asettaa taivutusjäykkyyden pienennys riippuvaksi suhteesta  $N_{Ed}/N_B$ :

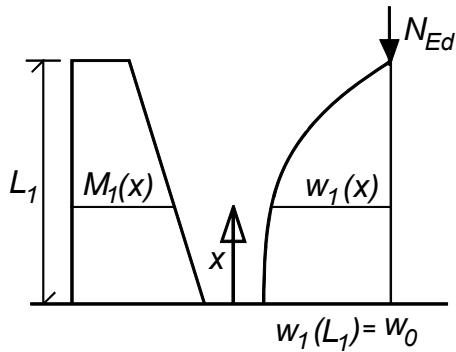
$$(EI)_2 = \frac{(EI)_c}{1 + \sqrt{\frac{N_{Ed}}{N_B}}}, \quad (EI)_c = \frac{0,3E_{cd}I_c}{1 + 0,5\varphi_{ef}} \quad \text{EN 1992-1-1 kohdan 5.8.7.2(3) mukaisesti.}$$

Jos  $N_{Ed}/N_B \leq 0,7$ ,  $(EI)_2/(EI)_c \geq 0,54$ .

*Mastopilarin taipumat*

Tarkastellaan taipumien laskemista mastopilarissa, jonka systeempituus on  $L_1$  ja ensimmäisen asteen momenttipinta  $M_1(x)$  lineaarisesti muuttuva ( $M_{01}$  = momentti pilarin yläpäässä ja  $M_{02}$  = momentti pilarin alapäässä). Oletetaan, että ensimmäisen asteen taipuma voidaan laskea käyttäen tehollista taivutusjäykkyyttä ( $EI$ ), joka on sama kuin pilarin nimellistä jäykkyyttä EN 1992-1-1 kohdan 5.8.7.2 mukaisesti. Lisätaipuma lasketaan käyttäen edellisen kohdan mukaista pienempää jäykkyyttä  $(EI)_2$ .





Taipuma 1. asteen momenteista =  $w_1(x)$ ,

$M_1(x)$  = ensimmäisen asteen momentit,

$L_1$  = pilarin pituus. Pilarin tehollinen pituus  $\ell_0 = K_{cr}L_1$  lasketaan EN 1992-1-1 kohdan 5.8.3.2(3) mukaisesti

- Lineaarisesti muuttuva momenttipinta - origo maston juuressa.  $M_{02}$  = momentti maston juuressa =  $M_1(0)$  ja  $M_{01}$  = momentti maston yläpäässä =  $M_1(L_1)$
- Ensimmäisen asteen taipuma (missä jälkimmäinen termi ottaa huomioon kiinnityksen joustosta aiheutuvan lisätaipuman,  $K_{cr} > 2$ ):

$$w_1(x) = \frac{1}{(EI)} \left( (L_1 - x) A_{M1}(0) - \int_x^{L_1} y M(x+y) dx \right) + \frac{M_{02} L_1 (L_1 - x)}{c_0 (EI)} (K_{cr}^2 - 4),$$

$$\text{missä } M_1(x) = M_{02} - \frac{x}{L_1} (M_{02} - M_{01}), \quad A_{M1}(x) = \int_x^{L_1} M_1(y) dy \text{ ja}$$

$$c_0 = \frac{12}{0,5 \frac{M_{01}}{M_{02}} + 1}.$$

- Toisen asteen lisätaipuma on  $\Delta w(x) \leftrightarrow$  taivutusmomentista  $M_2(x) = w_1(x) N_{Ed}$  aiheutuva taipuma ja sen suurin arvo on  $\Delta w = \frac{1}{(EI)_2} \left( A_{M2} L_1 - \int_0^{L_1} x M_2(x) dx \right),$

$$\text{kun } A_{M2} = \int_0^{L_1} M_2(x) dx.$$

## LIITE 2: BS8110 hoikat pilarit - Eurokoodi 2 taustat

Hoikaksi pilariksi määritellään sellainen, jossa  $\ell_0/d > 15$ . Lisäepäkeskisyys  $e_{add}$  on toisen asteen vaikutuksen osoittaja ja aiheutuu pilarin taipumasta. Kokonaismomentti, jonka suhteen pilari on mitoitettava, on  $M_{Ed} = M_{Ed1} + N_{Ed} e_{add}$ .

Hoikkuus ja toisen asteen vaikutus pienentää pilarin puristuskestävyyttä. Hoikkuudet rajoittuvat yleensä sellaisiksi, että epästabiilisuusmurtoja ei tapahdu ja murtuminen tapahtuu poikkileikkauksen kapasiteetin ylittyessä  $M_{Ed}, N_{Ed}$  yhdistelmän vaikuttaessa, jos rakenne on mitoitettu täyden käyttöasteen mukaisesti.

Kaarevuus kestävyuden ylittyessä on  $1/r_m$  ja se voidaan arvioida lausekkeella

$$\frac{1}{r_m} = \frac{1}{175h} \left[ 1 - 0,0035 \frac{\ell_0}{h} \right] \quad (L2.1)$$

Paikallinen kaarevuus ei riipu momenttien jakaantumamuodosta, mutta momenttipinnan muodon vaikutus voidaan ottaa huomioon lisäepäkeskisyydessä siten, että

$$e_{add} = \frac{\ell_0^2}{c} \left( \frac{1}{r_m} \right) = \frac{h}{175c} \left( \frac{\ell_0}{h} \right)^2 \left[ 1 - 0,0035 \frac{\ell_0}{h} \right] \quad (\text{L2.2})$$

missä  $c$  on jakaantumamuodosta riippuva vakio (vrt. kuva L1.1):

- $c = 12$  kun momenttipinta on kolmion muotoinen
- $c = 8$  kun momenttipinta on vakio
- $c = 9,6$  kun momenttipinta on parabolinen
- $c = \pi^2 = 9,87$  kun momenttipinta on sinimuotoinen

Koska  $c$ :n suuruus ei vaihtele kovin paljoa, sille voidaan käyttää tarkemman tiedon puuttuessa vakioarvoa  $c = 10$ .

BS8110:ssä lisäepäkeskisyyttä esitetään muodossa (olettaen  $c$ :lle vakioarvo 10)

$$e_{add} = \frac{1}{2000} \left( \frac{\ell_0}{D_{min}} \right)^2 h = \beta_a h \quad (\text{L2.3})$$

$D_{min}$  on poikkileikkauksen pienempi sivumitta.

### LIITE 3: Kimmoteorian mukaisen kriittisen kuorman $N_B$ arvioiminen ja siihen liittyvä nurjahduspituus $L_{cr}$

#### 1. Differentiaaliyhtälön käyttö

Käyrityksen lauseke perustuu differentiaaliyhtälöön

$$(EI) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -M(x), \quad (EI) = \text{taivutusjäykkyys taivutusosassa } (xy)$$

Vastaavasti voidaan käyttää neljännen asteen yhtälöä:

$$(EI) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + N \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$$

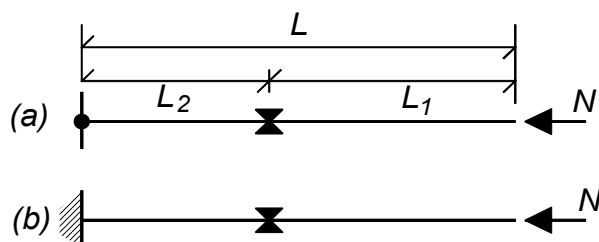
Differentiaaliyhtälön yleinen ratkaisu on

$$w = A \sin \beta x + B \cos \beta x + Cx + D; \quad \beta = \sqrt{\frac{N}{EI}}$$

Vakiot  $A$ ,  $B$ ,  $C$  ja  $D$  sekä kriittinen kuorma  $N_B$  voidaan ratkaista sauvan reunaehtojen avulla.

Differentiaaliyhtälön käyttö ei ole helppoa, kun on kysymys kaksi- tai kolmiulotteisen kehän tarkastelusta: reunaehtojen ja yhteensopivuusyhtälöiden määrä kasvaa huomattavaksi.

**Esimerkki L3.1:** kaksikerrospilari, jossa on vakio taivutusjäykkyys



Pilarit ovat muuten samanlaiset, mutta vasemmassa päässä on joko nivel (a) tai jäykkä kiinnitys (b)

Osissa  $L_1$  ja  $L_2$  on sama taivutusjäykkyys ( $EI$ )

Ratkaisua on tarkasteltu esim. Neuringer & Elishakoff'n kirjoituksessa (Int. J. Engng Ed. Vol 14 No 3, 204-216, 1998)

$N_B$  voidaan esittää joko koko pituuden  $L$  tai pituuden  $L_1$  funktiona:

$$N_B = \frac{\pi^2 (EI)}{L_{cr}^2}, \quad L_{cr} = \kappa_{cr} L \text{ tai } K_{cr} L_1 \quad (L3.1)$$

Merkitään  $\alpha = \beta L$  ja  $u = \frac{L_2}{L_1 + L_2} = \frac{1}{1 + L_1 / L_2}$ . Nurjahduskuorman ratkaisu voidaan

etsiä funktion  $f(\alpha, u) = 0$  nollakohtana  $\alpha$ :n suhteen, jolloin pienin positiivinen juuri  $\alpha_{cr}$  on määräävä.

(a)-tapaus:  $f_a(\alpha, u) = (\sin \alpha u - \alpha u \cos \alpha u) \sin \alpha(u-1) + \alpha u \sin \alpha u \cos \alpha(u-1)$

(b)-tapaus:  $f_b(\alpha, u) = (-2 + \cos \alpha u) \sin \alpha(u-1) - \sin \alpha + \alpha u \cos \alpha$

Ratkaistu  $\alpha_{cr} = \beta_{cr} L$  vastaa  $\frac{\alpha_{cr}^2}{L^2} = \frac{N_B}{(EI)}$ , josta  $N_B = \frac{\alpha_{cr}^2 (EI)}{L^2}$ . Tätä voidaan vielä muokata perinteiseen muotoon (L3.1).

Seuraavassa taulukossa on eräitä tyypillisiä arvoja, kun käytetään ratkaisun muotoa (L3.1). Useimmiten on tarkoituksenmukaisinta määritellä  $L_{cr}$  (tai Eurokoodin 2 mukaisesti merkittynä  $\ell_0$ )  $L_{cr} = \ell_0 = K_{cr} L_1$ .

**Taulukko L3.1:** Nurjahduskuorman liittyviä nurjahduspituuden kertoimia

(a) = alapäässä nivel, (b) alapää jäykästi kiinnitetty

$u$	$\kappa_{cr(a)}$	$K_{cr(a)}$	$\kappa_{cr(b)}$	$K_{cr(b)}$
0,3	1,602	2,289	1,551	2,215
0,35	1,537	2,365	1,476	2,271
0,4	1,473	2,454	1,402	2,337
0,45	1,409	2,563	1,328	2,415
0,5	1,348	2,695	1,255	2,510

$u \leq 0,5$  tarkoittaa, että  $L_1 \geq L_2$ . Kun  $L_1$  on selvästi suurempi kuin  $L_2$ , ero tapauksien (a) ja (b) välillä ei ole suuri. Nurjahdus tapahtuu taipuman kasvaessa ulokkeen päässä rajatta.

Kun  $u > 0,5$ , nurjahdusmuoto muuttuu ja nurjahdus tapahtuu pituudella  $L_2$ . Rajalla  $u = 1$  (eli  $L_1 = 0$ ) saadaan tunnetut nurjahduksen perustapaukset (a) = molemmista päistä nivelöity sauva ( $K_{cr} = 1$ ) ja (b) toisesta päästä nivelöity - toisesta jäykästi kiinnitetty sauva ( $K_{cr} = 0,7$ ).

Taivutusjäykkyys on ratkaisussa oletettu vakioksi koko pilarin pituudella  $L$ . Jos pituuksilla on erilaiset taivutusjäykkyydet, kertoimien arvot muuttuvat, koska  $f(\alpha, u)$ -funktiot muuttuvat. Silloin ratkaisua ei voida etsiä esitetyistä funktioista, ks. seuraava kohta.

*Osissa  $L_1$  ja  $L_2$  on toisistaan poikkeava taivutusjäykkyys ( $EI$ )*

Jos pituuksilla  $L_1$  ja  $L_2$  on erilaiset jäykkyydet  $(EI)_1$  ja  $(EI)_2$ , taulukon L3.1 arvot eivät ole voimassa, mutta nurjahduspituuden likiratkaisu voidaan esittää muodossa, joka koskee vain nurjahdusta joka tapahtuu pituudella  $L_1$  (perusteet: STEP Lecture B7, pituuskertoimen  $K_{cr}$  johtaminen, ks. seuraava sivu).

$$K_{cr} = \sqrt{4 + \frac{\pi^2 L_2 (EI)_1}{\eta L_1 (EI)_2}}, \quad (\text{L3.2})$$

$\eta = \eta_{(a)}$  tai  $\eta_{(b)}$  sen mukaan, tarkastellaanko esimerkkikuvassa vasemmassa päässä tuentaa nivelenä (tapaus (a)) vai kiinnitettynä (tapaus (b)).

$$\eta_{(a)} = 3 \text{ ja } \eta_{(b)} = 4$$

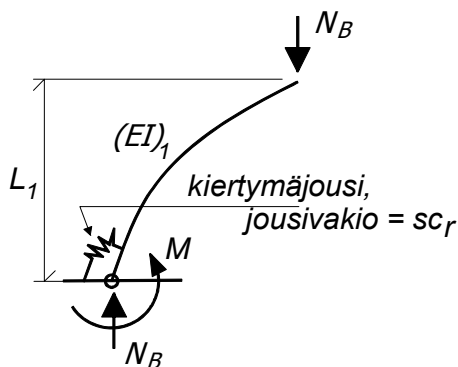
Jotta voidaan hahmottaa, onko kyseessä samansuuntainen lopputulos, verrataan edellisen taulukon arvoihin, kun  $(EI)_1 = (EI)_2$  ja  $L_1 = L_2$  (eli vastaa tapausta  $u = 0,5$ ):

$$K_{cr(a)} = \sqrt{4 + \frac{\pi^2}{3}} = 2,7 \text{ ja } K_{cr(b)} = \sqrt{4 + \frac{\pi^2}{4}} = 2,5 \rightarrow \text{arvot vastaavat taulukon L3.1 arvoja.}$$

**Huomautus:** Koska  $K_{cr}$  on myös taivutusjäykkyyksistä riippuva, ei yllä olevia erityistapauksen arvoja saa yleistää.

Tehollisen pituuden kerroin  $K_{cr}$  kun maston juuri on joustavasti tuettu

Lähde: STEP Lecture B7/H.J. Bass: Buckling lengths. Delft University of Technology



Rakennemallina on masto, jonka juuri ei ole täysin jäykkä, vaan sitä jäykistää kiertymäjousi, jonka jousivakio =  $sc_r$ . Momentin  $M$  aiheuttama kiertymä on  $\theta = \frac{M}{sc_r}$ .

Taipumaviivan differentiaaliyhtälön ratkaisua täytyy etsiä likimääräislausekkeesta, koska tarkkaa ratkaisua ei voida esittää suljetussa muodossa.

Likimääräisratkaisusta päädytään seuraavaan nurjahduskuorman lausekkeeseen

$$N_B = \frac{1}{\frac{4}{\pi^2} \frac{L_1^2}{(EI)_1} + \frac{L_1}{sc_r}} \quad (L3.3)$$

Kun otetaan huomioon jousivakion  $sc_r$  muodostuminen alemman kerroksen pilarin taivutusjäykkyyden ja sen kerroksen yläpään kiertymäjäykkyyden perusteella, päädytään lausekkeesta (L3.3) aikaisempaan lausekkeeseen (L3.2), kun käytetään kriittisen kuorman yleistä esitysmuotoa (L3.1).

Jos jousivakio  $sc_r$  esitetään verrannollisena sauvan ominaisuuksiin,  $sc_r = \kappa_r \frac{(EI)_1}{L_1}$  ja sen perusteella tehollisen pituuden kerroin on:

$$K_{cr} = \sqrt{4 + \frac{\pi^2}{\kappa_r}} \quad (L3.4)$$

Tehollisen pituuden kerroin voidaan tarkemmin ratkaista karakteristisesta yhtälöstä:

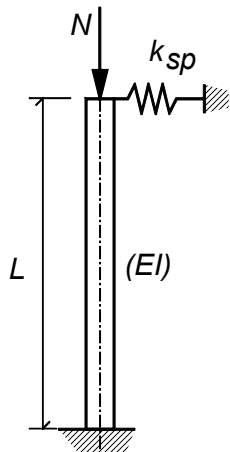
$$\tan x - \frac{\kappa_r}{x} = 0 \quad (L3.5)$$

jonka pienimmän nollasta poikkeavan juuren  $x_1$  perusteella  $K_{cr} = \frac{\pi}{x_1}$ .

$\kappa_r$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20
$K_{cr}$	3,652	2,917	2,635	2,484	2,391	2,328	2,282	2,248	2,22	2,199	2,1

Kun  $\kappa_r > 5$ , ero likiarvon (L3.4) ja taulukon arvojen välillä on häviävän pieni. Esimerkin L3.1 tapaus  $L_1 = L_2$  ja  $(EI)_1 = (EI)_2$  vastaa suhteellista kiertymäjousivakiota  $\kappa_r = 4$ . Lausekkeesta (L3.4)  $K_{cr} = 2,543$  ja ratkaistuna yhtälöstä (L3.5)  $K_{cr} = 2,484$ .

**Esimerkki L3.2:** Yläpäästään joustavasti kiinnitetyn maston tehollinen pituus



**Lähde:** Gambhir, M.L., Stability Analysis and Design of Structures. Springer 2004

Esitetään siirtymäjousivakion  $k_{sp}$  suuruus verrannollisena parametriin  $(EI)/L^3$ :  $k_{sp} = \kappa_e \frac{(EI)}{L^3}$ . Kertoimen  $\kappa_e$  funktiona tehollisen pituuden kerroin voidaan ratkaista tapauksen karakteristisen yhtälön pienimmän nollasta eroavan juuren  $x_1$  avulla:

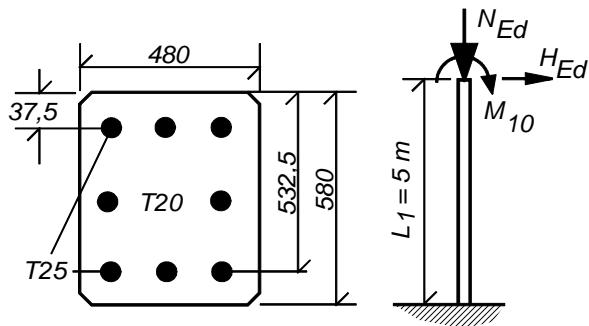
$$\frac{x^3}{x - \tan x} - \kappa_e = 0, \quad K_{cr} = \frac{\pi}{x_1}. \quad \text{Kun } \kappa_e \rightarrow 0, \quad K_{cr} = 2 \text{ ja kun } \kappa_e$$

kasvaa hyvin suureksi,  $K_{cr} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,707$ :

$\kappa_e$	0,1	1	2	3	4	5	7	10	20	100
$K_{cr}$	1,968	1,736	1,557	1,426	1,324	1,243	1,12	0,996	0,806	0,708

Taulukon mukaan jousivakio  $k_{sp} = 0,1 \frac{(EI)}{L^3}$  on jo niin pieni, että maston tehollinen pituus on lähes  $2L$ , eli jousivakiolla ei ole silloin merkittävää vaikutusta.

## MITOITUSVOIMASUUREET ERI TAVOIN ARVIOITUNA - MATHCAD TARKASTELUJA



Liitekuivissa on tarkasteltu mastopilarin mitoitusvoimasuureita  $N_{Ed}$ ,  $M_{Ed}$  suhteellisina arvoina

$$\nu = \frac{N_{Ed}}{A_c f_{cd}}; \mu = \frac{M_{Ed}}{A_c h f_{cd}} = \frac{M_{Ed}}{b h^2 f_{cd}}$$

$$\ell_0 = 2,2L_1, \text{ betoni C40/50}$$

$\mu_{sot}$  = toisen asteen teoria, lisämomentti aiheutuu taipumasta,

$\mu_{EC.nc}$  = EN 1992-1-1 nimelliskaarevuuteen perustuva menetelmä, jossa toisen asteen vaikutuksia tarkastellaan kasvattamalla pilarin momenttipinnasta riippuvaa ekvivalenttia momenttia,

$\mu_{EC.ns}$  = EN 1992-1-1 nimellisjäykkyyteen perustuva menetelmä, jossa toisen asteen vaikutuksia tarkastellaan kasvattamalla pilarin momenttipinnasta riippuvaa ekvivalenttia momenttia,

$\mu_{EC.ns2}$  = EN 1992-1-1 nimellisjäykkyyteen perustuva menetelmä johdettuna taipumien tarkastelun avulla,

$\mu_{EC.nc2}$  = EN 1992-1-1 nimelliskaarevuuteen perustuva menetelmä, jossa tarkastelu perustuu pilarin suurimpaan ensimmäisen asteen momenttiin, jota kasvatetaan toisen asteen lisäepäkeskisyyden avulla,

$\mu_{BN}$  = Suomen betoninormeihin perustuva menetelmä, jossa mitoitusmomentti lasketaan lisäämällä 1 asteen momenteja perus- ja lisäepäkeskisyyden aiheuttamalla momentilla.

Käytetyt perusteet, ks. kirjoitus "Pilarien mitoitus Eurokoodi 2 mukaisesti".

### MathCad-käyrät

1) Pilarin rasituksina on muuttuva normaalivoima ja pilarin yläpäähän taivutusmomentti  $M_{10} = 20$  kNm sekä pilarin yläpäähän vaikuttava vaakavoima  $H_{Ed1}$ , joka on perusvaakavoiman  $H_{Ed} = 30$  kN kerrannainen  $k_H H_{Ed}$  kN,  $k_H = 0, 1/2, 2/3, 1, 3/2$  ja 2. Pilarin vinous ja epäkeskisyydet ovat EN 1992-1-1 tai Betoninormien mukaiset. Normaalivoima esitetään verrannollisena nimellisen jäykkyyden perusteella laskettuun kriittiseen kuormaan  $N_B$ :

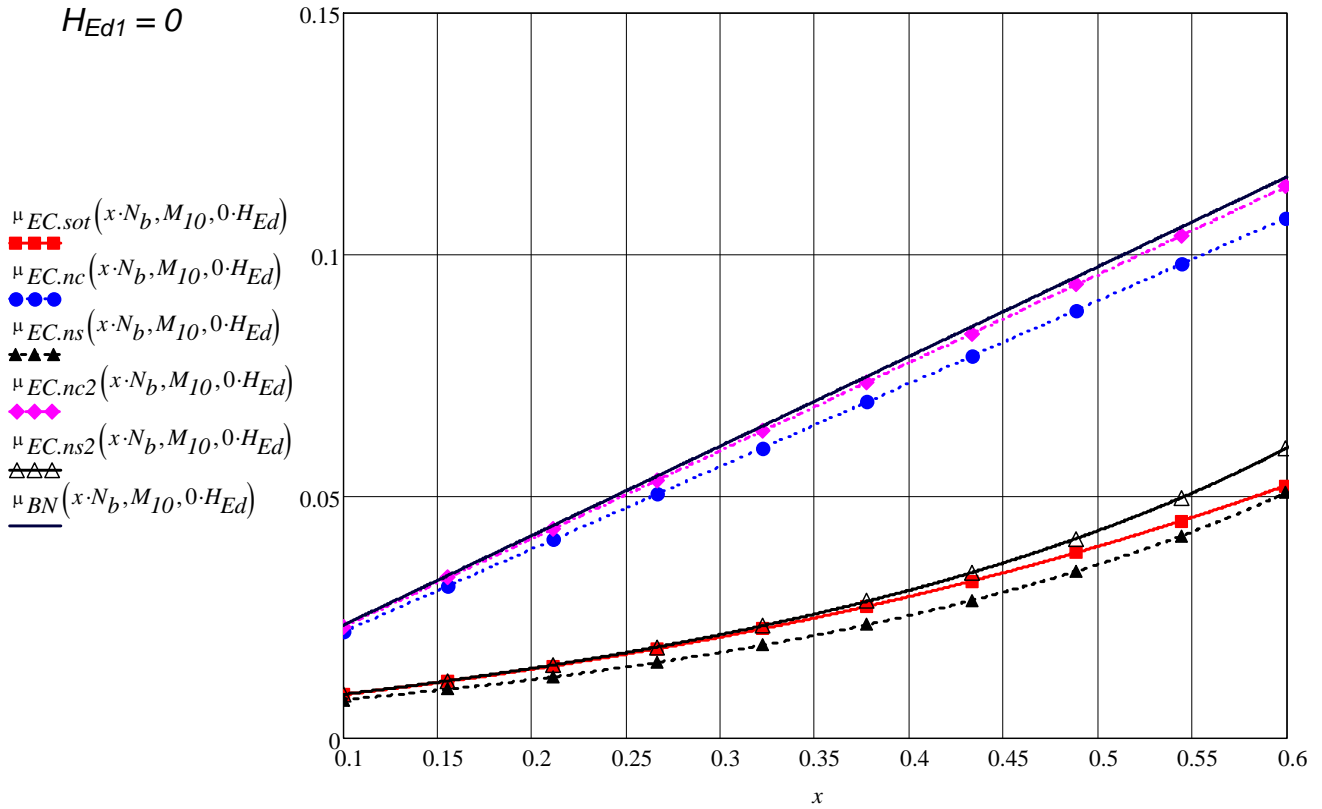
$$N_B = \frac{\pi^2 (EI)}{\ell_0^2} = 4,47 \text{ MN}, (EI) = K_C (A_c f_{cd}) \frac{E_{cm}}{1,2} I_c + E_s I_s.$$

$K_C (A_c f_{cd})$  on pilarin normaalivoiman arvosta riippuvan kertoimen  $K_C$  suurin arvo.

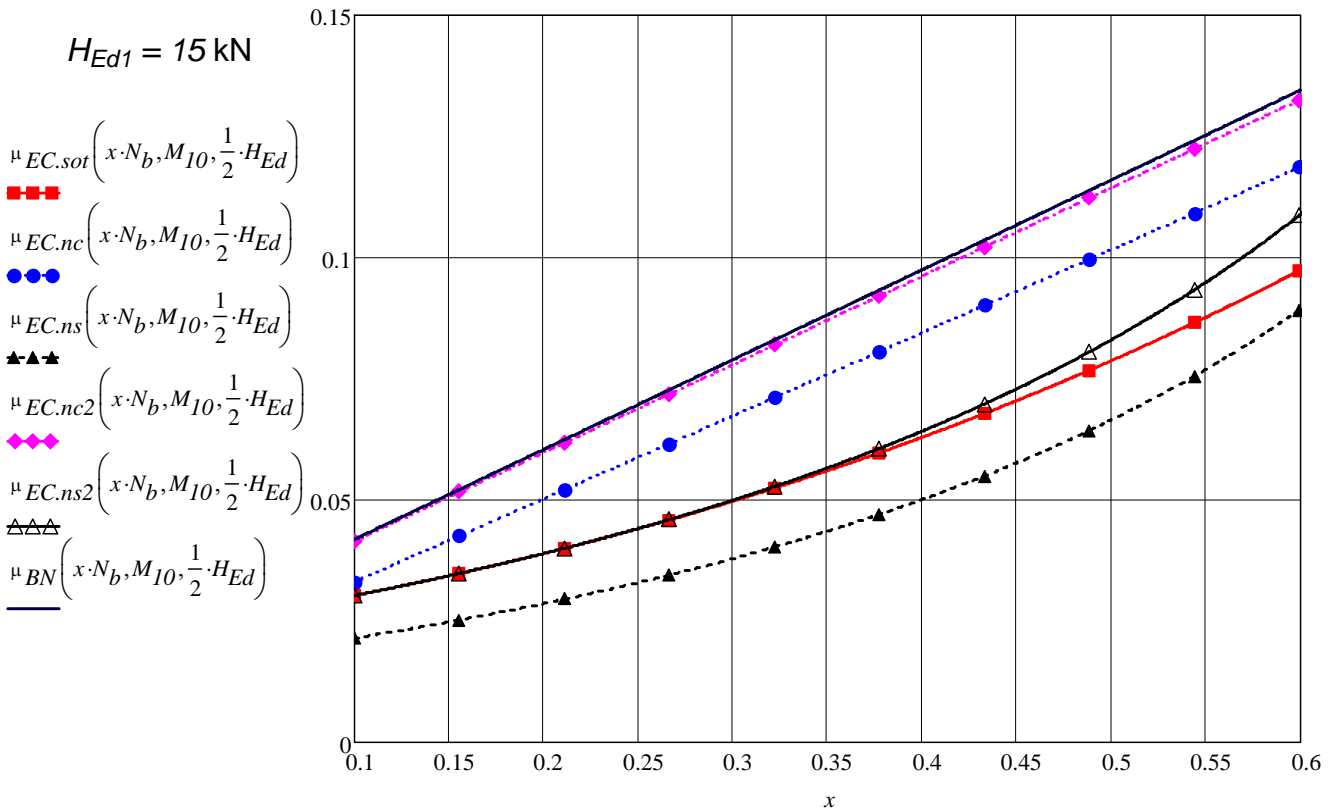
2) Pilarin normaalivoima on  $N_{Ed} = 0,3N_B$  tai  $0,45N_B$  ja vaakavoima  $H_{Ed1} = xH_{Ed}$  on muuttuva,  $x = 0 \dots 3$ .

### 1 Mitoitusvoimasuureet normaalivoiman muuttuessa

$H_{Ed1} = 0$

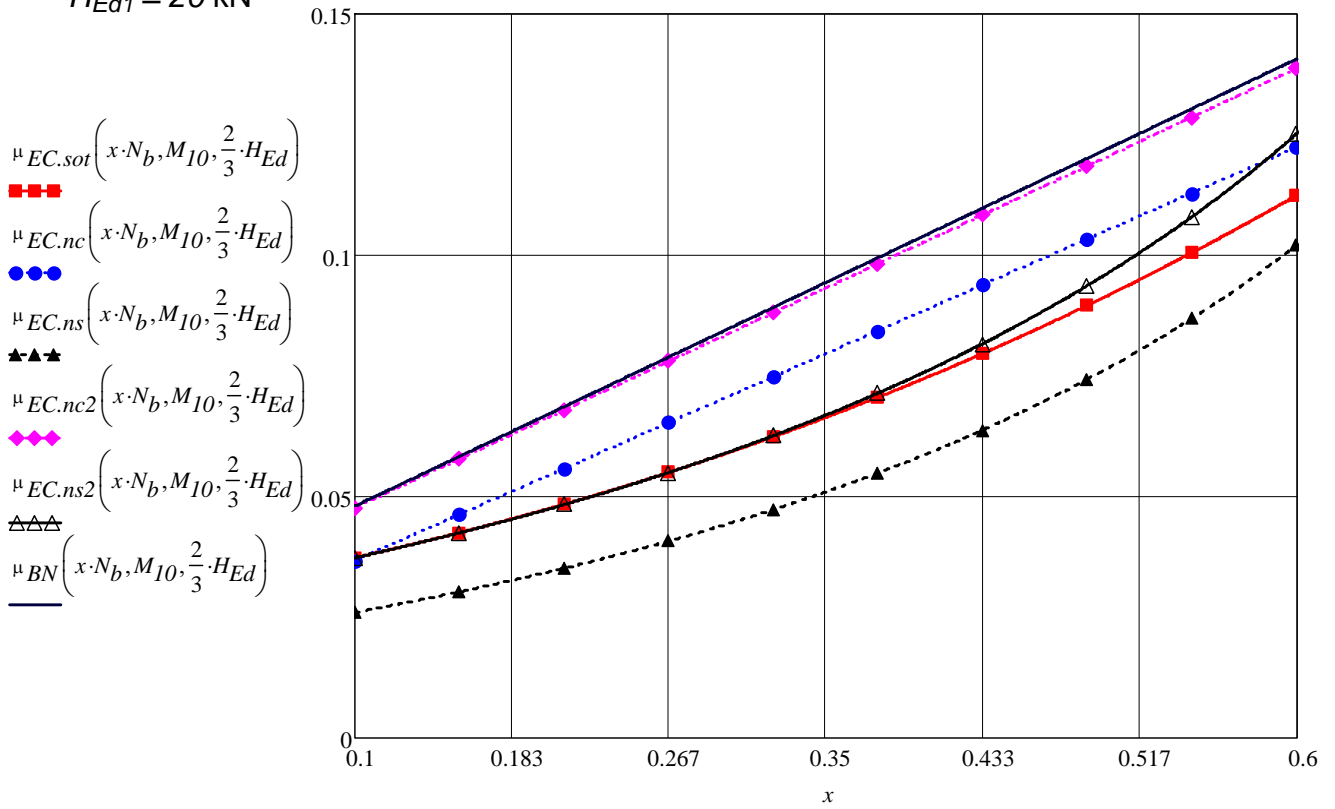


$H_{Ed1} = 15 \text{ kN}$

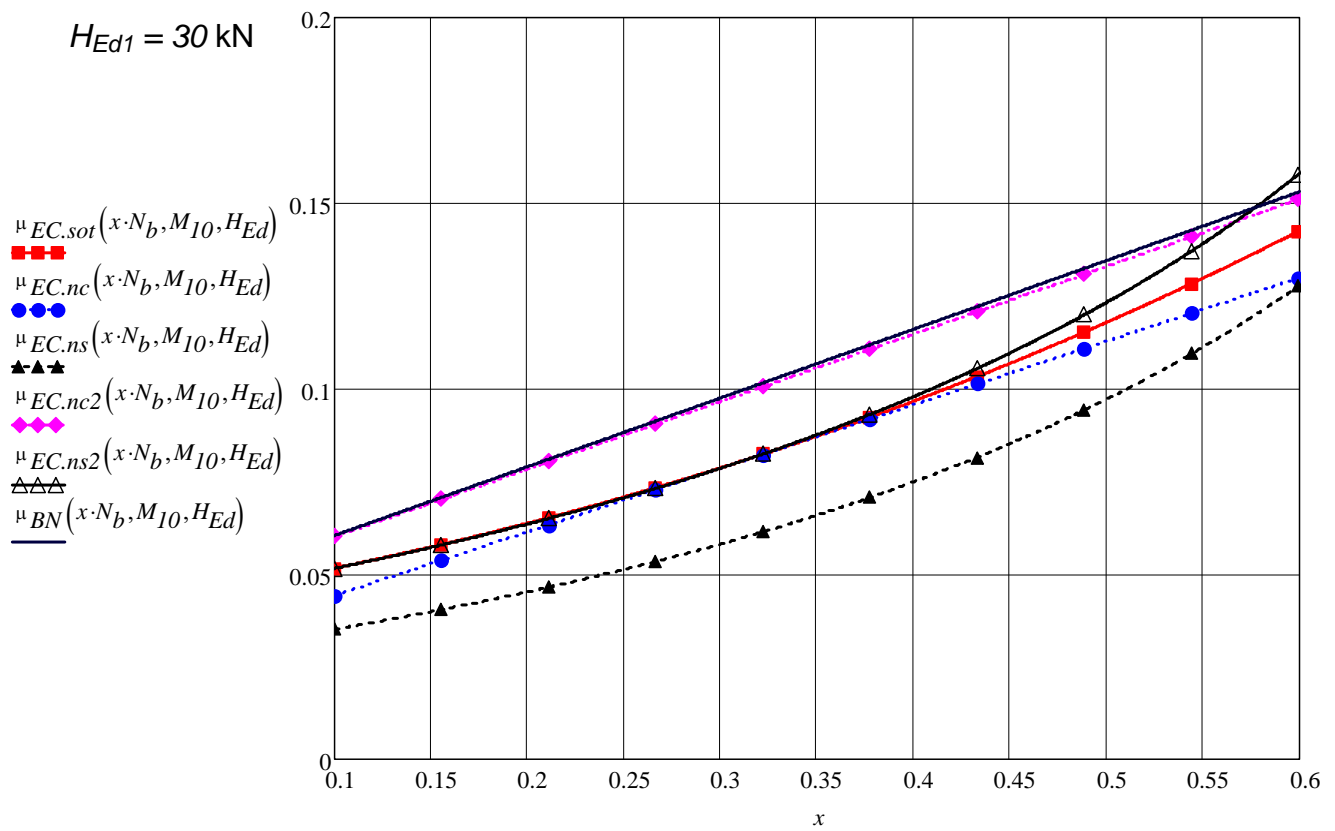




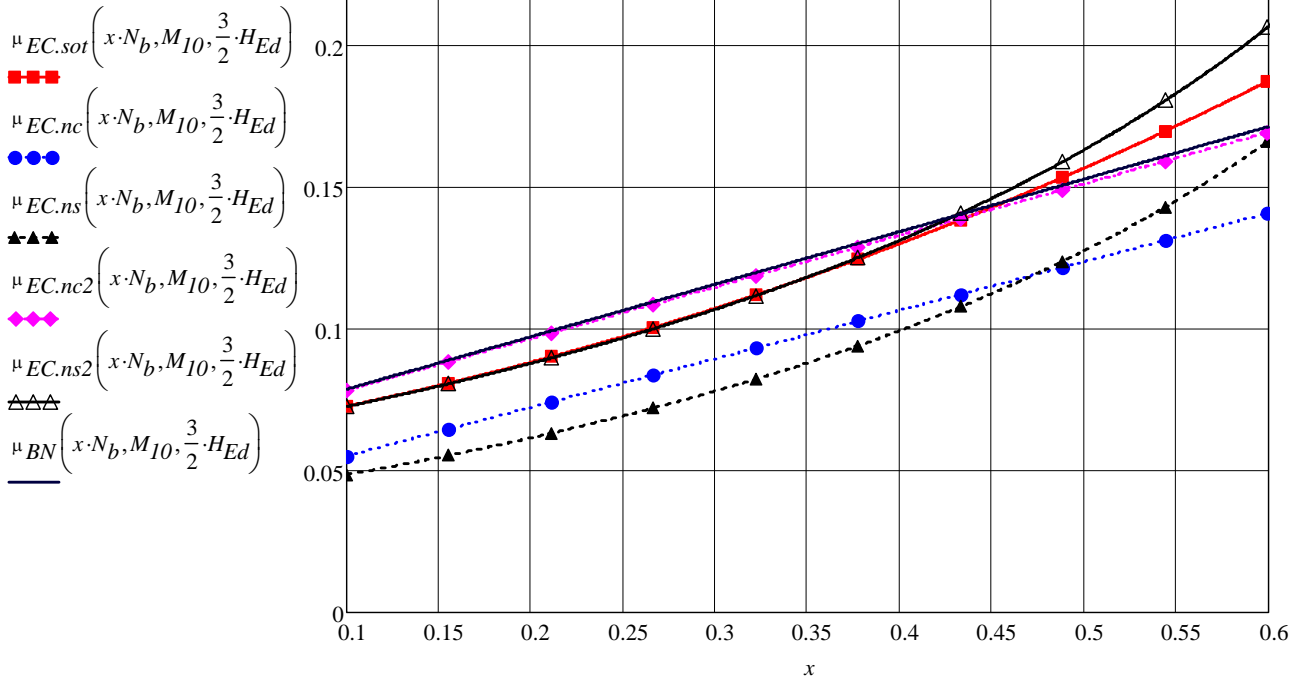
$H_{Ed1} = 20 \text{ kN}$



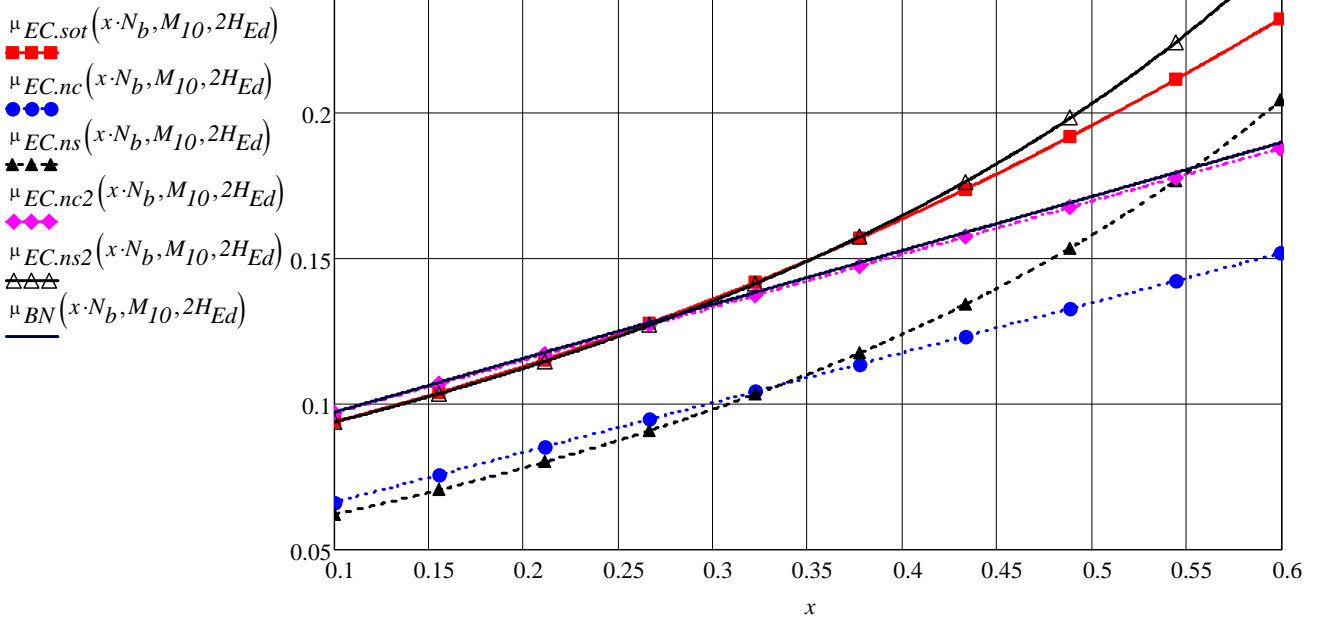
$H_{Ed1} = 30 \text{ kN}$



$H_{Ed1} = 45 \text{ kN}$

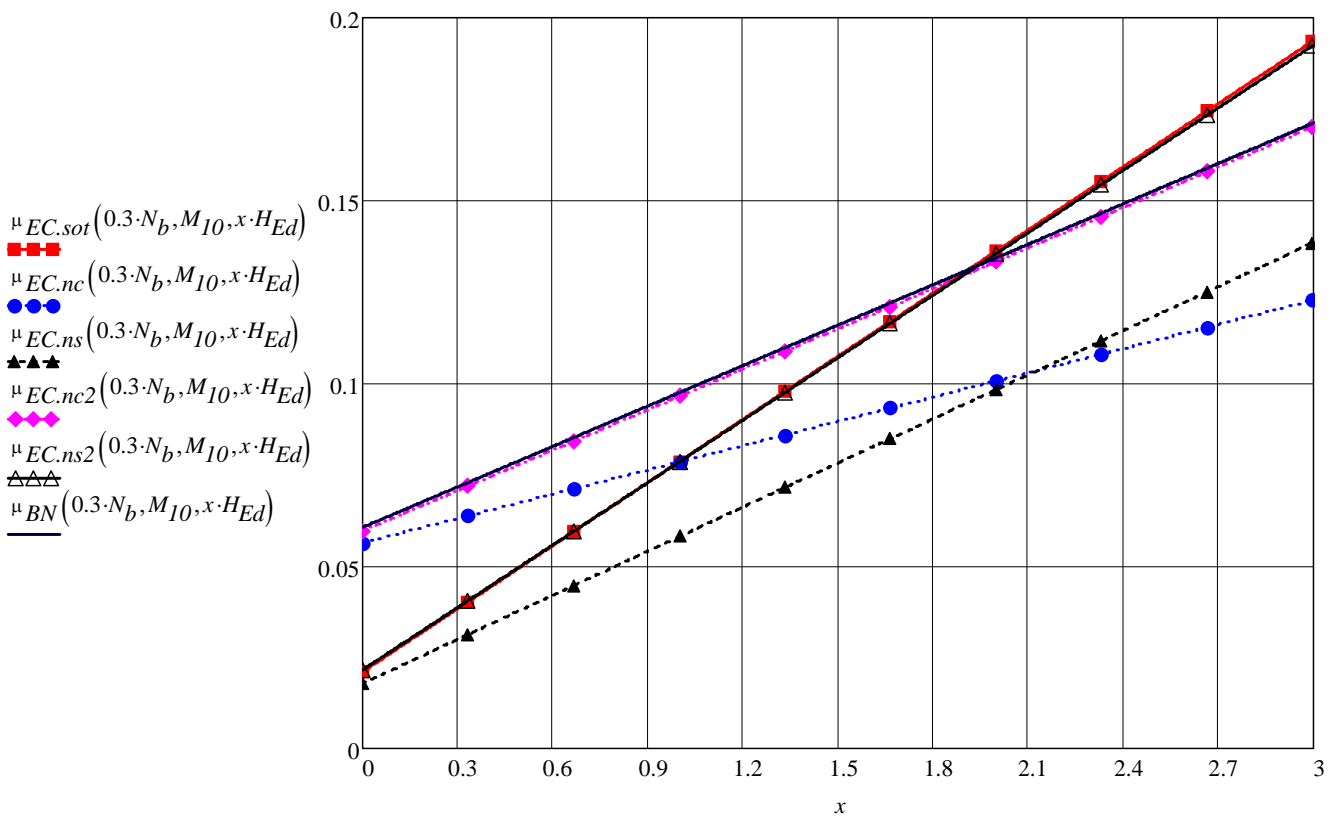


$H_{Ed1} = 60 \text{ kN}$



## 2 Mitoitusvoimasuureet vaakavoiman $H_{Ed1} = xH_{Ed}$ muuttuessa

$N_{Ed} = 0,3N_B$ , suhteelliset momentit vaakavoiman muutoksen  $H_{Ed}/H_{Ed1}$  funktiona



$N_{Ed} = 0,45N_B$ , suhteelliset momentit vaakavoiman muutoksen  $H_{Ed}/H_{Ed1}$  funktiona

